

UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Estrategia de Modelación matemática para la comprensión de un fenómeno físico de variación.

Línea de investigación: Pedagogía y Didáctica del Lenguaje, las Matemáticas y las Ciencias

Carlos Alberto Silva Jiménez

Bogotá, Marzo 21 de 2018

RAE. RESUMEN ANALITICO EN EDUCACIÓN.

Autor del RAE: Carlos Alberto Silva Jiménez

Fecha: Marzo 21 de 2018

Descripción bibliográfica

Tipo de documento

Documento académico digital

Tipo de impresión o documento virtual

-

Nivel de circulación

-

b. Documento

Estrategia de Modelación matemática para la comprensión de un fenómeno físico de variación.

Autor

Carlos Alberto Silva Jiménez

Editor

-

Publicación

-

Palabras claves

Modelación matemática,
Comprensión en matemáticas,
Variación
Representación gráfica
Grafico
Proporcionalidad
Proceso de modelación
Fenómeno de variación
Nivel de comprensión
Expresión matemática.

Resumen

Proyecto de investigación que propone utilizar la estrategia de modelación como medio de enseñanza aprendizaje para la comprensión de fenómenos de variación en estudiantes de básica secundaria y media.

Fuentes

Arrieta, Jaime; Cordero, Francisco; Cârsteanu, Alin; Mena, Jaime; Rodríguez, Ruth; Romo, Avenilde; Solís, Miguel; Suárez, Liliana (2009). *La modelación y la tecnología en las prácticas de enseñanza de las matemáticas*. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1717-1726). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
Biembengut, M., y Hein, N. (2004). *Modelación matemática y los desafíos para enseñar*

matemática. *Educación Matemática*, 16(2), 105-125.

Blomhøj, Morten. (2008). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. *Revista FAMAF*. Volumen 23.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. W., y Niss, M. A. (Eds.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study*. New York: Springer.

Cantoral, R., Farfán, R.M., Cordero, F., Alanís, J.A., Rodríguez, R.A. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.

Castiblanco, A., Moreno, L., Rodríguez, F., Acosta, M., & Camargo, L. (2001). Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de matemáticas de la educación media de Colombia. II Fase: Profundización y Expansión.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

ELLIOT, John. *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Morata, 2000

Gallardo, Jesús (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*. Doctorado tesis, Universidad de Málaga. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/625/2/Gallardo2004Diagnostico.pdf>.
 Noviembre 5 de 2015

Gómez, P. (1996). Una comprensión de la comprensión en matemáticas. *Revista EMA*, 1(3), 233-243. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/315/1/GomezP96-1590.PDF>, Noviembre 6 de 2015

Giordano F., Weir M., Fox W. (1997). *A first Course in Mathematical Modeling*. Brooks/Cole Publishing Company.

Habermas, J. (1981). Teoría de la acción comunicativa I. Madrid: Taurus, 1999 (Ed. Usada).

Küchemann, D.E. *The understanding of generalised arithmetic by secondary school children*. Unpublished doctoral dissertation. Chelsea College, University of London. 1980.

Latorre, A., del Rincón Igea, D., & Arnal, J. (1996). Bases metodológicas de la investigación educativa. Barcelona: Ediciones experiencia, 2005

Meel, D. (2003,). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Relime* Vol. 6, No. 3, 221-271.

Ministerio de Educación Nacional. (2007). Estándares básicos de competencias. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Bogotá: Magisterio.

Morin, E. (1994). El Método. El conocimiento del conocimiento. Madrid: Cátedra.

Osorio, F. C., Téllez, L. S., Lorca, J. M., Vera, J. A., Rodríguez, R., Gallegos, A. R. V.,... & Esquinca, M. S. LA MODELACIÓN Y LA TECNOLOGÍA EN LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.

Piaget, J., Inhelder, B., García, R. y Vonèche, J. (1981). *Epistemología genética y equilibración*. Homenaje a Jean Piaget. Madrid: Fundamentos.

Quintanilla, M. A. (1979). *Diccionario de filosofía contemporánea*. Salamanca: Sígueme.

Russell, B., & Whitehead, A. N. (1968). *Principia mathematica*. Cambridge University Press.

Schank, R. C. (1988). Una explicación de la inteligencia. En R. J. Sternberg y D. K. Detterman (Eds.) ¿Qué es la inteligencia? Enfoque actual de su naturaleza y definición (pp. 147-

158). Madrid: Pirámide

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Suárez, L. (2008). *Modelación–graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico (Tesis inédita de doctorado)*. Cinvestav-IPN, México, D.F.

Toulmin, S. (1977). *La comprensión humana I. El uso colectivo y la evolución de los conceptos*. Madrid: Alianza Universidad.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12 (1988 Year book of the National Council of Teachers of Mathematics)* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM

Vasco, C. (2006). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Villa-Ochoa, J. (2007). *La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo*. Tecno Lógicas, 19, 63-85.

Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz, M. (2009). Modelación en Educación Matemática. Una mirada desde los Lineamientos y Estándares Curriculares Colombianos. *Revista Virtual-Universidad Católica del Norte* (27), 1-21

Wiske, M. S. (org.) (1999): *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Barcelona, Paidós.

Contenido

Introducción. Marco Referencial. Metodología. Trabajo de Campo. Resultados y Hallazgos. Conclusiones y Recomendaciones. Anexos

Metodología

Enfoque de Investigación: CUALITATIVO

Tipo De Investigación: Investigación Acción

La metodología de investigación que se elige para ésta tesis es de cualitativa, en el que los hechos objeto de estudio se dan en el área de la educación, en el que se desenvuelven estudiantes y profesor en el que no son tan susceptibles de medir, sino que esos hechos son interpretables y comprensibles y las variables no son simplemente identificados como datos sino que adquieren significado en función del “interés con que se observan.

Conclusiones

La estrategia de modelación matemática, adecuadamente diseñada y desarrollada por parte del docente, utilizando un instrumento como la SECUENCIA DIDACTICA permite mejorar la comprensión matemática en las situaciones que involucran variación de magnitudes.

La representación gráfica de magnitudes contribuye al estudiante en la elaboración de expresiones matemáticas que involucran variación.

Aunque la modelación matemática depende del fenómeno a estudiar y necesita articulación por parte del docente lograr un resultado completo en las etapas no significa que no exista ninguna comprensión por parte del estudiante.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	16
CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	18
1.1. Planteamiento del problema	18
1.1.1 Identificación del problema	18
1.1.2. Ubicación del problema	18
1.1.3. Caracterización del problema	18
1.2. Pregunta de Investigación	19
1.3. Objetivos	19
1.3.1. Objetivo general	19
1.3.2. Objetivos específicos	19
1.4. Antecedentes del Problema	20
1.4.1. Modelación Matemática	20
1.4.2. Comprensión Matemática	22
1.4.3. Pensamiento variacional	23
1.5. Justificación	24
1.6. Propósito	25
1.7. Alcances	25
CAPITULO 2. MARCO REFERENCIAL	26
2.1. Modelación Matemática	26

2.1.1. Concepto de Modelación en general	26
2.1.2. Concepto de Modelación Matemática o Modelización	26
2.1.3. Concepto de Modelo Matemático	27
2.1.4. Proceso de Modelación	29
2.2. Comprensión en Matemáticas	30
2.2.1. Definición de comprensión en general	30
2.2.2. Importancia de la comprensión matemática	32
2.2.2.1.1 <i>Posición representacionista</i>	32
2.2.2.2. <i>Posición histórica empírica</i>	33
2.2.2.3. <i>Nociones de Significado y comprensión</i>	34
2.2.3. Niveles de Comprensión Matemática	35
2.3. Pensamiento variacional y fenómenos físicos	36
2.3.1 Fenómenos Físicos – Fenómenos de variación	37
2.3.1.1. <i>La matemática y su relación con las ciencias</i>	37
2.3.1.2. <i>Fenómeno Físico y Variación</i>	38
2.3.2. Definición de Pensamiento Variacional	39
2.3.3. La variación y la variable	39
CAPÍTULO 3. DISEÑO METODOLÓGICO	43

3.1. Enfoque de Investigación	43
3.2. Tipo de investigación	44
3.3. Corpus de la Investigación	45
3.3.1. Objeto de investigación o Unidad de análisis	45
3.3.2. Categorías de Análisis	45
3.3.3. Universo Poblacional	45
3.3.4. Caracterización de la población	46
3.3.5. Muestra	46
3.3.6. Fases del proceso investigativo	45
3.4. Trabajo de campo - Fase Diagnóstica	47
3.4.1 Propósito.	47
3.4.2. Categorías de Análisis	48
3.4.3. Instrumentos de recolección de información	51
3.4.4. Sistematización de la información Fase Diagnóstica	56
3.5. Trabajo de Campo - Fase de Intervención	57
3.5.1. Propósito	57
3.5.2. Instrumentos Utilizados	57
3.5.3. Secuencia Didáctica	57
3.5.3.1. Organización de la secuencia didáctica	59

3.5.4. Sistematización de la información Fase de Intervención	63
3.6. Condiciones éticas	64
3.7. Hipótesis de la intervención	64
CAPÍTULO 4. RESULTADOS	65
4.1. Hallazgos Fase Diagnóstica	65
4.1.1. Comprensión del enunciado o fenómeno modelar	65
4.1.2. Elaboración de la gráfica del fenómeno	65
4.1.3. Variación de las magnitudes, determinar la constante de proporcionalidad	66
4.1.4. Obtención de la expresión que relaciona las variables en términos de x y y	68
4.1.5. Generalización y obtención de una expresión sobre el fenómeno de variación	68
4.1.6. Conclusión general de la aplicación de este instrumento	70
4.2. Resultados de la Fase de Intervención	70
4.2.1. Sesión 1: Paralelepípedo rectangular	70
4.2.2. Sesión 2: Proporcionalidad Directa	71
4.2.3. Sesión 3. Proporcionalidad cuadrática	74
4.2.4. Sesión 4. Proporcionalidad inversa (Ley de Boyle)	75
4.2.5. Comparación Fase Diagnóstico vs. Intervención	77
4.2.6. Resultados Categoría Proceso de Modelación	79
4.2.7 Resultados categoría comprensión matemática	79
4.2.8. Resultados en cuanto a la categoría Pensamiento variacional	80
4.3. Fase de Análisis	80

4.3.1. Análisis por categorías. Triangulación	80
5. CONCLUSIONES	84
5.1. Recomendaciones	85
5.2 Limitantes	86
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	87

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Fases de modelización matemática. Tomado de Blomhøj (2008)	30
Figura 2. Niveles de Comprensión. Teoría APOE de Dubinsky	36

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Categorías, subcategorías y codificación	51
Tabla 2: Cuadro de Clasificación de preguntas actividad diagnóstica No. 1 por categorías de análisis	56
Tabla 3. Planificación de la Secuencia Didáctica	59
Tabla 4. Clasificación de preguntas. Sesión 1. de la Secuencia Didáctica	63
Tabla 5. Comparación de resultados Fase Diagnóstica vs. Fase de Intervención	78
Tabla 6. Triangulación de la información	84

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1. Diario de Campo	92
Anexo 2. Actividades Fase Diagnóstica	93
Anexo 3. Registro de Información. Actividad Diagnóstica	99

Anexo 4. Secuencia Didáctica	101
Anexo 5. Sistematización de la información Fase de Intervención	109
Anexo 6. Consentimiento Informado	111

INTRODUCCIÓN

Se hace necesario dentro de la enseñanza de las Matemáticas buscar estrategias que permitan a los estudiantes desarrollar la lectura comprensiva y el pensamiento matemático. La Matemática como ciencia que explica y está contenida en otras ciencias encuentra en la modelación una alternativa para que el aprendizaje de fenómenos naturales sea a través de la comprensión de objetos matemáticos más asequible, más significativa y adecuada al contexto de los estudiantes y sus prioridades, provocando en ellos mayor motivación, interés y utilidad.

Para responder a esto se ha elaborado el siguiente proyecto de investigación *“Estrategia de Modelación matemática para la comprensión de un fenómeno físico de variación”* como un aporte que mejore las estrategias de enseñanza de las matemáticas aplicadas a contextos físicos reales.

En el primer capítulo se establece el problema a abordar que radica en la comprensión de fenómenos de variación en estudiantes de grado décimo del IED Ricardo González de Subacho que fueron sujetos de la presente investigación

En el capítulo 2 se describen las diversas teorías y saberes propios de la modelación y la comprensión en matemáticas y un recorrido de la modelación desde varios puntos del pensamiento académico.

En el capítulo 3 se establece el diseño metodológico de la investigación enmarcada desde una investigación cualitativa.

En el capítulo 4 se reseñan la recolección de información, el tratamiento de los datos y su utilización.

En el capítulo 5 se realiza un análisis de acuerdo a tres categorías de investigación seleccionadas y los hallazgos y resultados obtenidos de acuerdo a la intervención realizada.

Finalmente en el capítulo 6 se presentan las conclusiones que se pueden obtener del presente proyecto de investigación y se dan algunas recomendaciones que surgieron en la elaboración del estudio.

Se desea que el presente estudio sirva como antecedente para continuar el estudio de la utilidad de la modelación matemática en la comprensión de los objetos matemáticos en estudiantes del nivel de secundaria y sus beneficios en el quehacer del docente en matemáticas.

CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

1.1.1 Identificación del problema

Existen dificultades en la comprensión de la modelación de fenómenos físicos de variación, en los estudiantes de grado décimo de la IED Ricardo González de Subachoque que se han evidenciado en los resultados de las evaluaciones internas realizadas por los docentes en la institución educativa y en los resultados de las pruebas saber once realizadas por el ICFES.

1.1.2. Ubicación del problema

El problema se ubica en el campo de la enseñanza -aprendizaje de la comprensión de la modelación matemática de fenómenos de variación. El contexto se refiere a las actividades de aprendizaje en una clase de física en grado décimo.

1.1.3. Caracterización del problema

Los elementos que definen el problema son las dificultades en la comprensión e interpretación de variaciones, la modelación matemática, la argumentación matemática; las variables, la comprensión e interpretación de gráficas, la argumentación, los conceptos previos de los estudiantes.

El problema surge cuando el docente identifica en las clases los errores, los conceptos distorsionados, las dificultades en el proceso de la modelación matemática, es el caso de la interpretación de gráficas de variación de un fenómeno físico y la modelación matemática del mismo mediante una relación funcional; esta dificultad aflora cuando los estudiantes solucionan problemas de física en el que el paso del modelo físico al modelo matemático no tiene ninguna relación y significado con el fenómeno físico y por ende no hay comprensión de la función matemática en particular en contextos en el que se trabaja con problemas sobre fenómenos

de variación de una o más variables. Las investigaciones realizadas en países como México, España y Colombia sobre problemas de estudiantes en la modelación presentan problemática similares; y se han abordado utilizando diversas estrategias para incidir en el mejoramiento de la problemática, entre ellas la modelación matemática y el uso de TICS aplicadas en el aprendizaje.

1.2. Pregunta de Investigación

¿Cómo incide en la comprensión de un fenómeno físico de variación el uso de la modelación matemática como recurso didáctico?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Demostrar cómo el uso de la modelación matemática como recurso didáctico incide en la comprensión de los fenómenos de variación que realizan los estudiantes de grado decimo de la IED Ricardo Gonzáles de Subachoque.

1.3.2. Objetivos específicos

- Diagnosticar las dificultades en la comprensión de fenómenos de variación que tienen los estudiantes cuando usan la modelación matemática para explicar los fenómenos de la física.
- A partir de las dificultades identificadas, diseñar una estrategia didáctica que mediada por la modelación matemática permita comprender los fenómenos físicos de variación.
- Valorar la incidencia de la propuesta didáctica en la comprensión de los fenómenos físicos de variación haciendo uso de la modelación matemática.

1.4. Antecedentes del Problema

A continuación se describe los estudios e investigaciones que se han realizado fundamentadas en las variables: Modelación Matemática, Comprensión en matemáticas y pensamiento variacional en fenómenos físicos:

1.4.1. Modelación Matemática

Dentro de las estrategias para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el aula una que de manera didáctica y pertinente ha tenido importancia es la modelación matemática. El estudio de Villa (2007), presenta elementos que permiten reflexionar sobre el proceso de modelación como estrategia didáctica como son la experimentación, la abstracción y simplificación, el uso de representaciones y las diferentes fases de modelación desde el planteamiento del fenómeno hasta la validación y modificación del modelo. Por esta razón, cuando se habla de modelación no se trata de hacer “más elemental” el proceso de modelización, sino lo contrario, hacer una resignificación con fines educativos.

En Blomhøj (2008), se habla de una teoría sobre modelización matemática que se funda en las definiciones de modelo matemático, modelización, y competencia en modelización e incluye una justificación de la modelización matemática como elemento esencial de la enseñanza de la matemática en los distintos niveles del sistema educativo. El autor también describe analíticamente el proceso de modelación matemática en subprocesos como son: Formulación del problema, sistematización, traducción de objetos y relaciones al lenguaje matemático, uso de métodos matemáticos para análisis, interpretación de resultados, evaluación y validación del modelo. Este estudio concluye que los alumnos parecen gustar de la idea de describir sus experiencias de modelación más fácilmente que tener que argumentar de una manera tradicional; los niveles de compromiso son altos y nadie cuestiona la relevancia de un proyecto

de modelación; los alumnos emplearon mucho tiempo en asuntos prácticos como recolectar datos y diseñar posters o carteleras; se ayudaron e inspiraron entre ellos, y acudieron al profesor frecuentemente para buscar estímulo y apoyo; casi todos los alumnos realizan cálculos y variadas representaciones gráficas de sus propios datos.

Los artículos de investigación de Biembengut, y Hein (2004), describen la Modelación como un método de enseñanza de matemática con el objetivo de proporcionar al alumno una mejor aprehensión de los conceptos matemáticos, capacitación para leer, interpretar, formular y resolver situaciones-problemas, así como despertar el sentido crítico y creativo. Adicionalmente este estudio da un enfoque investigativo a la modelación porque lleva al alumno a: actuar/hacer y no sólo a recibir sin comprender el significado de lo que estaba estudiando; a investigar, que es una actividad poco común a pesar de ser parte del currículo; a originar conocimiento, desarrollar la creatividad y sentido crítico, principalmente en la formulación y validación del modelo; a interactuar y enterarse de los trabajos de los demás grupos, y, entre otras cosas, aplicar la metodología de la investigación científica al elaborar una exposición escrita del trabajo. Finalmente concluyen que a pesar de las dificultades, se ha demostrado que la adopción de modelos matemáticos en la enseñanza, sea en la presentación, sea en el proceso de creación, correctamente dimensionados a la realidad de las comunidades escolares, es un medio que propicia un mejor desempeño del alumno, generando un desafío para los docentes.

El estudio de investigación doctoral de Suárez (2008), plantea una epistemología para la modelación escolar caracterizada a través del uso de gráficas; partiendo del Tratado de Oresme sobre Figuración de las Cualidades, aborda las situaciones de cambio y variación genera un

debate entre el uso de las gráficas en la modelación de una situación de movimiento. Este estudio concluye que una situación de modelación que se sustente en prácticas de modelación gráfica que hagan legítima una construcción social del conocimiento, es decir en un contexto específico, propician una *resignificación* de la variación.

Por otro lado Villa y Ruiz (2009), presentan algunas debilidades que tiene la utilización de la modelación matemática dentro del currículo. En éste se afirma que existe una contradicción entre los ejemplos sobre modelación que presentan los Lineamientos Curriculares en Matemáticas que tiende más a ilustrar la resolución de problemas que a la práctica de modelación. Esta contradicción tiene implicaciones en la práctica docente y la implementación en el aula de clase.

1.4.2. Comprensión Matemática

Enfocados en la comprensión de la matemática, la comprensión es el objetivo en la educación matemática y permite un desarrollo de estrategias y procedimientos apropiados. En educación matemática se encuentran diversas perspectivas y enfoques sobre la importancia de la comprensión en el aprendizaje de los conceptos matemáticos que podemos revisar enseguida, entre ellas tenemos los que enfatizan en la representacionalista, la posición histórica empírica, y la de significado.

Para la perspectiva representacionalista, Gallardo (2004), realiza una investigación doctoral denominada Diagnóstico y Evaluación de la comprensión del conocimiento matemático teniendo como propósito general sentar las bases teóricas y metodológicas de una aproximación integradora y operativa al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático, el autor

explica como la comprensión obedece a una representación estructural entre la información a aprender y la base de conocimientos y experiencia de las personas.

La posición histórico empírica de Sierpinska (1994), presenta a la comprensión intentando responder a la cuestión: ¿qué significa comprender tal o cual noción en matemáticas? Plantea que la especificidad del conocimiento matemático es reconocida como un aspecto esencial. Su preocupación está en contribuir a entender mejor los problemas relacionados con la comprensión matemática de los alumnos y vislumbrar cómo los sujetos concretos comprenden las matemáticas en su vida real, esta aproximación se sustenta en la noción fundamental de *acto de comprensión*, que se considera como la experiencia mental real por la que se relaciona un objeto con otro.

El enfoque de Significado y comprensión es abordado por Díaz (2000), la investigación que realiza se basa en la naturaleza de los objetos matemáticos y sus significados. Las conclusiones de sus estudios se dirigen a determinar qué aspectos de esos objetos matemáticos son convenientes para ser comprendidos por los alumnos en un nivel concreto y cuáles son las fases o niveles necesarios para alcanzar una “buena comprensión” en palabras de los investigadores.

1.4.3. Pensamiento variacional.

Las investigaciones de Cantoral et al. (2000), ubican al Pensamiento y Lenguaje Variacional como una línea de investigación que se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el sistema social que le da cabida. En el estudio se toman ideas matemáticas para analizarse desde la enseñanza aprendizaje y se muestra su aplicación en la derivada. La investigación arroja que el estudio del cálculo diferencial debe realizarse desde un

contexto numérico que es como históricamente se ha desarrollado y es una base inductiva que permite el entendimiento de objetos matemáticos en los estudiantes.

Acerca del estudio de la variable, Küchemann (1980), con una muestra de 3000 estudiantes identifica seis diferentes maneras de interpretar los símbolos literales usados como variable, a saber: Letra evaluada, letra como objeto, letra como incógnita específica, letra como número generalizado, letra como variable. Mientras que Usiskin (1988), destaca en su investigación cuatro usos diferentes de la variable y las asocia a diferentes concepciones del álgebra y afirma que el concepto de variable se utiliza en diferentes contextos con diferentes significados y se trata de diferente manera.

1.5. Justificación

Se hace pertinente y necesario mejorar las posibilidades de comprensión matemática de los fenómenos físicos de variación buscando lograr que impacten la realidad del estudiante, para ello se propone que la actividad matemática se pueda identificar con una actividad de modelación, que sea una estrategia en donde el estudiante construye otra "realidad" de un fenómeno físico planteado respondiendo de ésta manera a las exigencias de poseer un saber específico para poder aplicarlo de acuerdo a un contexto determinado.

Chevallard, Bosch y Gascón (1997), proponen que no sea un aspecto más de las matemáticas. Así, la preocupación no consiste en las relaciones entre las matemáticas y el mundo real u otras disciplinas, ni la forma en la que los alumnos puedan establecer esta relación, sino en el análisis y descripción de las condiciones que permiten cambiar la manera como se realiza el proceso didáctico de las variaciones en los estudiantes buscando que el aprendizaje sea más dinámico, más realístico, más significativo y motivador.

El presente estudio se relaciona con el énfasis Pedagogía y Didáctica del Lenguaje, las Matemáticas y las Ciencias de la Maestría en Educación pues aborda conceptos, teorías y elementos específicos de la educación en matemáticas como la modelación, el pensamiento variacional, la comprensión, etc, que puede ser utilizado como antecedente para investigaciones posteriores.

La realización de este proyecto justifica satisfacer las necesidades de la institución educativa en cuanto a saberes académicos que puedan aplicarse en el aula y a los estudiantes mejorar el desarrollo del pensamiento matemático de maneras más significativas y realistas

1.6.Propósito

Aplicar la modelación matemática como estrategia para una comprensión mejor de los fenómenos físicos de variación.

Establecer una estrategia didáctica que mejore la comprensión de la modelación matemática

1.7.Alcances

Lograr impactar y transformar el aprendizaje de los estudiantes de matemáticas en grado 10° de la IED Ricardo González. Subachoque y en general a cursos de estudiantes de instituciones educativas en contextos similares donde se pueda implementar la estrategia didáctica.

CAPITULO 2. MARCO REFERENCIAL

A continuación se presentan las teorías y conceptos que fundamentan el objeto de estudio del proyecto de investigación “Estrategia de Modelación matemática para la comprensión de un fenómeno físico de variación”.

2.1 Modelación Matemática

2.1.1. Concepto de Modelación en general

Según la Real Academia Española de la Lengua, modelización es “*la acción y efecto o de modelar*”, y el verbo *modelizar* hace referencia a “*construir el modelo o esquema teórico de algo*”; diferente de *modelar* que es “ajustarse a un modelo”. Sin embargo, en muchos de los trabajos en idioma español los autores escriben o traducen usando preferentemente “modelación” dejando “modelización” a los académicos puramente españoles.

2.1.2. Concepto de Modelación Matemática o Modelización

Según Villa (2007), al proceso de obtención de un modelo matemático a partir de un fenómeno real es a lo que se llama: *modelización matemática*. La modelización es una actividad científica, que se usa para solucionar un problema de otras ciencias; donde los conceptos matemáticos emergen través de un proceso de abstracción y simplificación del fenómeno; obedece a problemas que comúnmente no han sido abordados o se abordan de una manera diferente al interior de la ciencia; en su ambiente propio en la cual se aplica y generalmente es externa a factores educativos.

2.1.3. Concepto de Modelo Matemático.

Para Blomhøj (2008) un modelo matemático es “Una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática” (p. 21).

Alguna de las definiciones de Modelo Matemático que relacionan la matemática con el mundo real son las de Giordano, Weir y Fox (1997), lo definen como “Una construcción matemática dirigida a estudiar un sistema o fenómeno particular del “mundo-real” Este modelo puede incluir gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales” (p.34)

Desde un punto de vista didáctico se destaca la definición de Villa (2007), “se llama simplemente modelo matemático a un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación” (p.67)

A si mismo, menciona que la modelización es una actividad científica, que se construye para solucionar un problema de otras ciencias; donde los conceptos matemáticos emergen través de un proceso de abstracción y simplificación del fenómeno; obedece a problemas que comúnmente no han sido abordados o se abordan de una manera diferente al interior de la ciencia; en su ambiente propio en la cual se aplica y generalmente es externa a factores educativos.

Adicionalmente el Ministerio de Educación Nacional MEN, incluye a la modelación dentro de los cinco procesos que se deben implementar en la clase para lograr el desarrollo del pensamiento matemático, los cuales son: El razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. (MEN, 1998, p. 18).

Para el Ministerio de Educación Nacional el concepto de modelación lo define como:

Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema –a veces se dice también “una estructura”– que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo (MEN, 2006, p.52).

Además manifiesta algunas características del modelo tales como: Se elabora para construir un concepto matemático dotado de un significado y con la intención de despertar una motivación e interés por las matemáticas debido a su carácter aplicativo; los conceptos matemáticos se consideran a priori con base en la selección del contexto y los propósitos de la clase; se presenta regularmente en el aula de clase con la motivación de los problemas cotidianos y de otras ciencias.

Villa (2007), distingue diferentes concepciones de la modelación según los aspectos a investigar y cada una de estas concepciones tiene consecuencias directas o indirectas sobre las maneras de actuar al interior del aula de clase. De allí, reconoce cuatro y formas de concebir la modelación según las posibilidades que genera al interior del aula de clase:

1. Como una estrategia de los seres humanos para la explicación y producción del conocimiento y también para el aprendizaje;
2. Como una herramienta didáctica;
3. Como una competencia y una herramienta para desarrollar competencias matemáticas

4. Como una herramienta para posicionarse de manera crítica frente a las demandas sociales y democráticas.

La modelación matemática aparece como una estrategia que posibilita la comprensión de un concepto matemático que está dentro de un campo o contexto más pequeño dotado de relaciones y significados que prepara al estudiante para indagar y abordar los problemas de un contexto real; es decir “*la modelación matemática es la actividad que se realiza en la clase de matemáticas cuya naturaleza se deriva de la actividad científica de la modelización matemática*”. (Villa, 2007, p. 70).

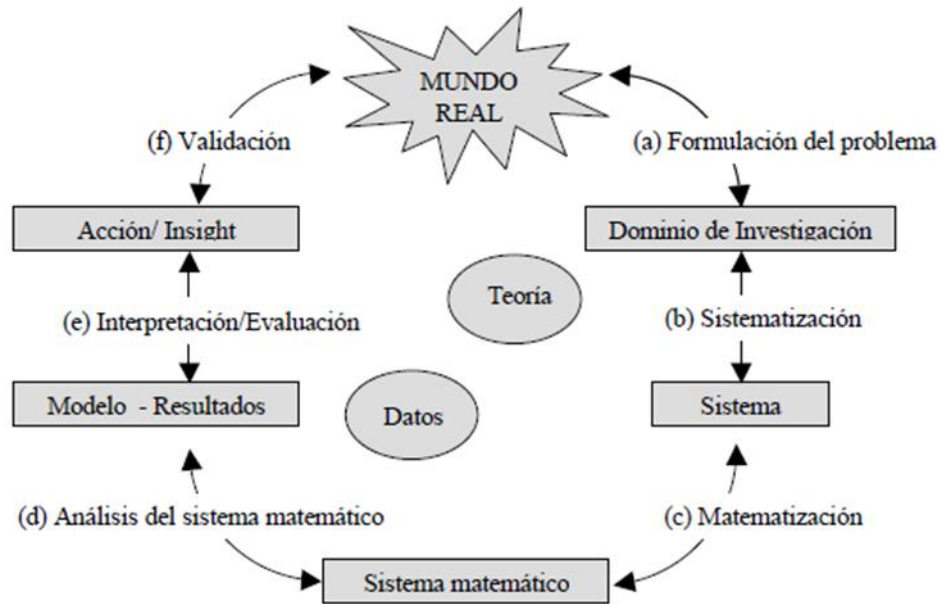
2.1.4. Proceso de Modelación.

Las etapas o pasos que debe tener un proceso de modelización matemática consistente en seis sub-procesos, según Blomhøj y Højgaard (citado por Blomhøj, 2008) son:

- a) Formulación del problema
- b) Sistematización: selección de los objetos relevantes, relaciones, etc.
- c) Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.
- d) Uso de métodos matemáticos para arribar a resultados matemáticos y conclusiones.
- e) Interpretación de los resultados y conclusiones.
- f) Evaluación de la validez del modelo por comparación con datos observados, o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

Éste proceso tiene unas fases que idealmente deben desarrollarse en torno a una función didáctica que involucra a estudiantes, profesor y actividad matemática. La siguiente figura tomada de Blomhøj (2004), traducido por Mina (2008) ilustra éste proceso:

Figura 1. Fases de modelización matemática. Tomado de Blomhøj (2008)



2.2. Comprensión en Matemáticas

A continuación se presentan algunas teorías y conceptos sobre Comprensión Matemática necesarios en la implementación de estrategias como la modelación que favorezcan el desarrollo del pensamiento variacional aplicado a fenómenos físicos permitiendo un ambiente de aprendizaje enriquecedor.

2.2.1. Definición de comprensión en general.

Según la Real Academia de la Lengua Española, comprensión es la: “Facultad, capacidad o perspicacia para entender y penetrar las cosas”. La comprensión va más allá de entender lo que está escrito, está relacionado con las ideas que se encuentran detrás de los textos. Para los profesores es muy importante que en la enseñanza que imparten esté en un primer plano la comprensión de los conceptos que aprenden sus estudiantes; por ello se hace necesario indagar

sobre qué concepciones existen sobre la comprensión. Es claro que comprensión no solo se reduce al conocimiento o a reproducir información; además de las implicaciones que tiene la palabra en todas las ciencias exactas y humanas.

Desde una visión del lenguaje cotidiano, cercana a la de la ciencia cognitiva, a menudo se piensa en la comprensión como algún tipo de representación, imagen o modelo mental que tiene la gente. Para Perkins (1999), la comprensión es *“algo que se posee más que la capacidad de realización; es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. -la comprensión de un tópico es la "capacidad de desempeño flexible" con énfasis en la flexibilidad”* (p. 69).

Piaget, Inhelder, García, y Vonèche (1981). Son otros de los autores que han tratado desde un enfoque epistemológico el tema de la comprensión. Para Piaget

“Ser capaz de realizar una determinada acción práctica o identificar el *cómo* hacer algo no debe llegar a contemplarse como comprensión. De hecho, en el proceso mediante el cual el ‘hacer’ es transformado en el ‘conocer’ la comprensión se alcanzaría en una etapa posterior a la acción. En dichos planteamientos se puede detectar, por tanto, una dualidad entre *hacer y conocer* o *acción y conceptualización*, siendo este último el significado que el autor da a la comprensión. “(Citado en Gallardo, 2004, p. 127).

2.2.4. Importancia de la comprensión matemática

La matemática es una ciencia que, a partir de operaciones básicas exactas y a través del razonamiento lógico, estudia las propiedades y relaciones cuantitativas entre elementos matemáticos, en la misma se hace necesaria la presencia de diversas actividades mentales que benefician la resolución de problemas de diversos fenómenos físicos. La comprensión es el

objetivo fundamental en la educación matemática y crea como beneficio un apropiado desarrollo de estrategias y procedimientos apropiados. Existen diversas perspectivas de la comprensión en matemáticas, enseguida se abordaran algunas de ellas:

2.2.4.1. Posición representacionalista. Propone un marco teórico basado en el concepto de representación y en el procesamiento de la información de la psicología cognitiva; según Hiebert y Carpenter (1992) citados por Gallardo (2004), afirman que

“La idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido si forma parte de una red interna. Más específicamente, las matemáticas son comprendidas si su representación mental forma parte de una red de representaciones. El grado de comprensión está determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se enlaza a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes” (p.46)

La noción de representación para Castro, Rico y Castro (1997), citado por Gallardo (2004) muestra la necesidad de emplear coordinadamente una pluralidad de sistemas de representación para poner de manifiesto aspectos esenciales de las estructuras numéricas: *“Consideramos que la comprensión es una representación estructural o conceptualmente ordenada de las relaciones entre las partes de la información que se debe aprender, y entre esa información y esas ideas y nuestra base de conocimientos y experiencia”*(p.47).

2.2.2.2. Posición histórica empírica. De la misma manera Sierpinska (1994) presenta una aproximación a la comprensión que trata de responder a cuestiones como la siguiente: ¿qué significa comprender tal o cual noción en matemáticas?

En sus planteamientos, la especificidad del conocimiento matemático es reconocida como un aspecto esencial. Su principal preocupación no radica en definir con precisión el término *comprensión* o en caracterizar el concepto de comprensión, sino en contribuir a entender mejor los problemas relacionados con la comprensión matemática de los alumnos y vislumbrar **cómo** los sujetos concretos comprenden las matemáticas en su vida real.

La propuesta de Sierpinska no pretende ser un *modelo de comprensión* en el sentido usual del término. Por el contrario, su aproximación se sustenta en la noción fundamental de **acto de comprensión**, que se considera como la experiencia mental real por la que se relaciona un objeto con otro. El objeto, a su vez, será todo aquello que pueda ser aislado como objeto de nuestra comprensión: “[...] los conceptos abstractos matemáticos pueden ser objetos para nosotros.... También los juicios (teoremas, conjeturas, etc.) y los razonamientos (demostraciones, explicaciones) pueden ser considerados como objetos.” (p. 32).

Según Gomez (1996), Sierpinska concibe la comprensión como una experiencia de naturaleza activa e identifica cuatro componentes principales en un acto de comprensión:

- (a) El *sujeto de comprensión* o el sujeto que comprende (epistémico y psicológico).
- (b) El *objeto de comprensión* o lo que el individuo intenta comprender.
- (c) La *base de comprensión* o lo que dirige el pensamiento del sujeto hacia el objeto de comprensión o el soporte para realizar un nuevo acto de comprensión.

(d) *Operaciones mentales básicas*, que enlazan el objeto de comprensión con su base.

Asimismo, la autora menciona cuatro operaciones básicas que describe en un trabajo anterior (Sierpiska, 1990) como categorías o tipos de actos de comprensión: ***identificación, discriminación, generalización y síntesis***. Estas operaciones se ponen en funcionamiento a través de acciones que implican experimentar, utilizar y aplicar como condiciones necesarias para que se produzcan los actos de comprensión.

Sierpiska caracteriza también lo que denomina ***proceso de comprensión*** o secuencia de actos de comprensión enlazados entre sí mediante razonamientos de distinto tipo:

“Los procesos de comprensión pueden ser considerados como rejillas de actos de comprensión enlazados por razonamientos. Si A y B son actos de comprensión, entonces podemos admitir que $A \sqsubset B$ (A precede a B) si hubo un razonamiento R, de algún modo inducido o inspirado por A, que condujo, a su vez, al acto de comprensión B” (p. 72).

La enseñanza aprendizaje de las matemáticas tiene varias dimensiones: una dimensión mental del que aprende, la dimensión física cuando el estudiante interactúa matemáticamente con el profesor, la de la matemática como saber cultural de un grupo (como ciencia) y la de las experiencias no necesariamente matemáticas del estudiante; para éste caso particular reflexionaremos sobre la dimensión mental entendiendo a la comprensión como un proceso de la mente.

Teniendo en cuenta lo anterior, para Gómez, (1996), la comprensión matemática consiste en la reorganización de nuestras formas de conocimiento de tal forma que estos modelos mentales sean coherentes con las experiencias que vivimos. El sujeto comprende algo (objeto de comprensión, que son creaciones de la mente como producto de nuestras propias definiciones)

cuando logra relacionarlo con algo contenido en sus estructuras mentales (base de comprensión que son las representaciones mentales que tiene el sujeto y son expresadas de manera gráfica, simbólica o verbal) a través de una serie de operaciones mentales dentro de un proceso de comprensión compuesto por actos de comprensión que se relacionan entre sí. Algunos de éstos actos de comprensión, los significativos, requieren que se reorganicen las estructuras mentales”.

2.2.2.3. Nociones de Significado y comprensión. Estas nociones buscan determinar aquellos aspectos de los objetos matemáticos que son más convenientes y adecuados para ser comprendidos por los alumnos de un nivel concreto y las fases necesarias para llevar a estos alumnos a una “buena comprensión”:

Con respecto a esto Díaz (2000), plantea las nociones de *prácticas significativas*, *significado* de un objeto e *institución*. La primera hace referencia a las acciones, observables o no, que con una función determinada realiza una persona para resolver una situación o problema matemático. La noción de *institución* tiene que ver con las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas y que realizan unas prácticas sociales compartidas. En tercer lugar, aquellos sistemas de prácticas que resulten eficientes para alcanzar el fin pretendido, denominados “sistemas de prácticas prototípicas significativas”, constituyen el significado personal (institucional) del objeto.

2.2.3. Niveles de Comprensión Matemática

Determinar las dificultades en la comprensión de los conceptos matemáticos en general, ha generado trabajos de investigación que pretenden describir como se transforma y evoluciona el acercamiento al objeto matemático, dentro de ellos la teoría APOE de Dubinsky, alude a la

propuesta de Piaget sobre el proceso de abstracción reflexiva como mecanismo mediante el cual un individuo se mueve de un nivel de comprensión a otro). (Dubinski, citado por Mel, 2003).

Figura 2. Niveles de Comprensión. Teoría APOE de Dubinsky

NIVELES DE COMPRENSIÓN: TEORÍA APOE DE DUBINSKY



La teoría APOE (Acción–Proceso–Objeto–Esquema) establece que el desarrollo de la comprensión comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente contruidos en términos de acciones; las acciones se interiorizan para formar procesos que se encapsulan para formar objetos. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas.

En el desarrollo de un esquema se definen tres niveles particulares: Inter, Intra y Trans. El nivel Intra se caracteriza por el enfoque de un solo objeto en aislamiento desde otras acciones, procesos y objetos. El nivel Inter se caracteriza por el conocimiento de las relaciones entre las distintas acciones, procesos, objetos y/o esquemas. El nivel Trans se caracteriza por la construcción de una estructura coherente que subyace en algunas de las relaciones descubiertas en el nivel Inter del desarrollo. Mel, D. (2003)

2.3. Pensamiento Variacional y Fenómenos físicos

Los currículos en la enseñanza de las matemáticas deben favorecer la relación entre las matemáticas y otras ciencias (Biología, Física y Química) para la construcción del conocimiento en el conjunto de las áreas, logrando que la interacción entre éstas favorezca la resignificación de conceptos matemáticos y de otras ciencias.

2.3.1 Fenómenos Físicos – Fenómenos de variación

Dentro de las Ciencias Naturales, específicamente en la Física, se estudian fenómenos naturales que pueden describirse o caracterizarse a través de objetos o expresiones matemáticas que caracterizan las leyes o teorías que los sustentan. Fenómenos físicos como el aumento o la disminución de una magnitud, o la relación entre dos magnitudes o variables se encuentran ampliamente y profusamente en las actividades y problemas planteados para solución en los grados superiores y que en un lenguaje matemático se explican a través del objeto matemático de *variación*.

2.3.1.1. La matemática y su relación con las ciencias. A nivel pedagógico, en el aula de clase entre matemáticas y ciencias no es utilizada con recurso didáctico, esto se debe a las dificultades y falta de métodos de enseñanza en el docente que logre la aplicabilidad de la matemática con otras ciencias, en particular, la física, la biología, debido a que centra su atención en el saber disciplinar propio, sin buscar una mirada interdisciplinar, lo que ocasiona un aislamiento, a una confusión de su utilidad en los estudiantes y a un bajo resultado en el quehacer del docente aunque se es consciente de su importancia para la vida cotidiana. Como lo afirma Rodríguez (2011, p 37)

Se suele aceptar como un absoluto incuestionable que la matemática juega un papel importante en el desarrollo de las ciencias, en la tecnología y para interpretar la vida cotidiana. Sin embargo, el proceso académico enseñanza - aprendizaje se realiza, en ocasiones, con unos grados de abstracción que alejan la ciencia formal de la realidad de los estudiantes, de sus intereses. Es menester que los profesionales, matemáticos y docentes de la ciencia se formen para recobrarla en las aulas.

2.3.1.2. Fenómeno Físico y Variación. Los fenómenos físicos son los cambios que experimentan los cuerpos, materia o sustancia sin alterar su composición y ocurren cuando se lleva a cabo un proceso o cambio, que puede ser reversible, sin perder sus características, propiedades ni modificar su naturaleza. Son ejemplos, de fenómenos físicos los cambios de estado de la materia, el desplazamiento de un vehículo, el estiramiento de un resorte, el aumento o disminución de las dimensiones de un objeto, la caída libre de un cuerpo, etc.

Las caracterizaciones y descripciones de esos fenómenos físicos se realizan matemáticamente través del concepto de variación. El Ministerio de Educación Nacional propone dentro de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas el estudio de la variación como un logro a alcanzar y supone unos cambios en la educación como:

“Superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucre conceptos y procedimientos inter-estructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propias matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas” (MEN, 1998).

De acuerdo a ello, la *variación* posibilita la comprensión de diversos fenómenos físicos a partir de ecuaciones que los modelan, pero para ello se debe superar la enseñanza de contenidos fragmentados y acercarse a procedimientos estructurados y vinculados como la modelación matemática de situaciones problemáticas donde la variación sea el fundamento de ellas.

La modelación favorece la construcción del conocimiento ya que no es una herramienta, sino que en sí misma es “una construcción del conocimiento”. Cuando se habla de “el uso de las gráficas” se hace referencia a un tipo de modelación y a una práctica social que favorece el desarrollo de una matemática funcional que será valorada por el estudiante ya que le permitirá comprender los conceptos matemáticos y a ver la funcionalidad de la matemática no sólo en ella sino en los diferentes contextos donde se desenvuelva.

2.3.2 Definición de Pensamiento Variacional.

Proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos inter-estructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas. En esta forma se amplía la visión de la variación, por cuanto su estudio se inicia en el intento de cuantificar la variación por medio de las cantidades y las magnitudes.

2.3.3. La variación y la variable

El Ministerio de Educación Nacional MEN (1998), realiza una rápida visión a la evolución histórica, del estudio de la variación y narra que ésta se inicia con las tablas babilónicas, con las

gráficas de variación (Oresme en la Edad Media) y con las fórmulas algebraicas de origen renacentista. Particularmente, el contexto de la variación proporcional para modelar las situaciones de variación cobra especial relevancia por ser la única teoría matemática con la que se contaba en la Edad Media. Pero es en el contexto del estudio del movimiento donde se alcanza la construcción matemática de la variación, lo que configura el Cálculo.

La presentación histórica de la variación, hace necesario desmenuzar los conceptos, procedimientos y métodos que involucra la variación para poner al descubierto las interpelaciones entre ellos. Según el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2008), un acercamiento en la búsqueda de las interrelaciones permite identificar algunos de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación:

- a) Continuo numérico, los reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad;
- b) La función como dependencia y modelos de función
- c) Las magnitudes;
- d) El álgebra en su sentido simbólico, desprendida de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo;
- e) Modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado.

En los contextos de la vida práctica y en los científicos, la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía (conocida como medición de la variación absoluta o relativa).

Los conceptos mencionados permiten al estudiante actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático.

Entendido así el desarrollo del pensamiento variacional se asume por principio que las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo, que su aprendizaje es un proceso que se madura progresivamente para hacerse más sofisticado, y que nuevas situaciones problemáticas exigirán reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas. Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998).

En los contextos de la vida práctica y en los científicos, la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía (conocida como medición de la variación absoluta o relativa). Estos conceptos promueven en el estudiante actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático.

Abordado así el desarrollo del pensamiento variacional se asume por principio que las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo, que su aprendizaje es un proceso que se madura progresivamente para hacerse más sofisticado, y que nuevas situaciones problemáticas exigirán reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas.

Entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas, la instruccional (programación), la mecánica (molinos), las fórmulas y las expresiones analíticas.

El estudio de la variación puede ser iniciado desde la misma primaria; el significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos

escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. La organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucren procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas. En estos problemas los números usados deben ser controlados y los procesos aritméticos también se deben ajustar a la aritmética que se estudia. Igualmente, la aproximación numérica y la estimación deben ser argumentos usados en la solución de los problemas. La calculadora numérica se convierte en una herramienta necesaria en la iniciación del estudio de la variación. Ministerio de Educación Nacional (MEN,1998).

CAPÍTULO 3. DISEÑO METODOLÓGICO

3.1. Enfoque de Investigación

La metodología de investigación que se elige para ésta tesis es de tipo cualitativo, en el que los hechos objeto de estudio se dan en el área de la educación, donde se desenvuelven estudiantes y profesores, los cuales no son tan susceptibles de medir, sino que esos hechos son interpretables y comprensibles, donde las variables no son simplemente identificados como datos sino que adquieren significado en función del “interés” con que se observan.

Algunas características al concepto de investigación cualitativa lo mencionan autores de la siguiente manera:

“Se caracteriza por ser holístico, inductivo, idiográfico. Holístico, en el sentido de que estudia la realidad desde un enfoque global, sin fragmentarla ni seccionarla en variables. Inductivo, porque las categorías, patrones e interpretaciones se construyen a partir de la información obtenida y no a partir de teorías o hipótesis previas. E Idiográfico, porque se orienta a comprender e interpretar lo singular de los fenómenos sociales dejando las explicaciones de las leyes generales para las ciencias nomotéticas. (Latorre, del Rincón y Arnal, 2005, p

El proceso de investigación es interactivo, progresivo y flexible. Las estrategias de investigación están al servicio del investigador y no a la inversa. La recogida de información se realiza a través de estrategias interactivas como: la entrevista, la observación participante o el

análisis de documentos. De esta manera, se obtiene una comprensión directa de la realidad social, no mediada por definiciones conceptuales u operativas, ni filtrada por instrumentos de medida.

La metodología cualitativa cumple con la rigurosidad de los métodos, pues como lo expresan los anteriores autores define *criterios de cientificidad*, como son: la credibilidad, la transferibilidad, la dependencia de marcos teóricos más amplios y la confirmabilidad.

3.2. Tipo de investigación

Tipo de investigación: Investigación Acción. A la investigación acción se le adjudica su punto de origen en las investigaciones llevadas a cabo por el psicólogo norteamericano Kurt Lewin en la década de los 40, en éstas investigaciones los investigadores debían asumir el papel de agentes de cambio, en conjunto con las personas hacia las cuales iban dirigidas las propuestas de intervención. Según Restrepo, (2005), Lewin concibió este tipo de investigación como.

“la emprendida por personas, grupos o comunidades que llevan a cabo una actividad colectiva en bien de todos, consistente en una práctica reflexiva social en la que interactúan la teoría y la práctica con miras a establecer cambios apropiados en la situación estudiada y en la que no hay distinción entre lo que se investiga, quién investiga y el proceso de investigación. (p. 1)

En Gran Bretaña, los investigadores Elliott y Adelman, en conjunto, dieron un gran impulso a un nuevo resurgir en la metodología de investigación acción en el campo de las Ciencias de la Educación. Elliot , (2000) , considera la investigación-acción como:

“El estudio de una situación social para intentar mejorar la calidad de la acción en la misma. Su objetivo consiste en proporcionar elementos que sirvan para facilitar el juicio práctico en situaciones concretas y la validez de las teorías e hipótesis que genera no depende tanto de pruebas ‘científicas’ de verdad, sino de su utilidad para ayudar a las personas a actuar de modo más inteligente y acertado [...] En la investigación- acción, las ‘teorías’ no se validan de forma independiente para aplicarlas luego a la práctica, sino a través de la práctica”. (p. 88)

3.3. Corpus de la Investigación.

3.3.1. Objeto de investigación o Unidad de análisis.

El Objeto de investigación o Unidad de análisis es la Modelación.

El objeto de estudio es el objetivo desconocido que llena de curiosidad al investigador y sobre el que se cimentan las investigaciones pertinentes para que el vacío de conocimiento pueda ocuparse o resolverse y adquiriera sentido y significado.

3.3.2. Categorías de Análisis

Las categorías son los conceptos que hacen parte de la investigación y que es necesario definir de forma clara. En la investigación las categorías de análisis surgen a partir del marco teórico y con ellas se definen qué y cuáles son los conceptos que se usarán para explicar el tema de investigación y limitan los alcances de la misma. A partir de ellas se organiza e inicia la recolección de información.

Para el presente estudio las categorías seleccionadas son:

- Modelación matemática

- Comprensión en matemáticas

-Pensamiento variacional

3.3.3. Universo Poblacional

Para el caso del presente estudio el universo poblacional se referirá a los Estudiantes de Grado

Décimo de la IED Ricardo González. Subachoque

3.3.4. Caracterización de la población

Los estudiantes son jóvenes de edades entre quince y diez y ocho años, estudiantes del grado 1001 del IED Ricardo González. Subachoque. En su mayoría (59%) pertenecen al sector urbano. Los padres de familia de estos estudiantes son principalmente jornaleros que trabajan en empresas agrícolas de la región y los padres de los estudiantes del casco urbano (41%) trabajan en labores varias o economía informal. La filosofía de vida está centrada en el trabajo, se divierten escuchando música popular y juegos con equipos electrónicos y la mayoría profesan creencias religiosas cristianas.

3.3.5. Muestra

Es un conjunto de objetos y sujetos procedentes de una población, es decir, un subgrupo de la población, que cumplen con unas determinadas especificaciones. La Muestra es de carácter intencional-Homogénea en la que los sujetos de investigación son similares en cuanto a sus condiciones y se han escogido con el interés de conocer las dificultades en la comprensión de

la modelación; en este análisis la muestra serán 34 Estudiantes del curso 1001 de la IED Ricardo González. Subachoque

3.3.6. Fases del proceso investigativo

La investigación cualitativa, plantea, por un lado, que observadores competentes y cualificados pueden informar con objetividad, claridad y precisión acerca de sus propias observaciones del mundo social, así como de las experiencias de los demás. Por otro, los investigadores se aproximan a un sujeto real, un individuo real, que está presente en el mundo y que puede, en cierta medida, ofrecernos información sobre sus propias experiencias, opiniones, valores, etc. La presente investigación se realizó en las siguientes fases:

- Fase Diagnóstica: Tuvo como propósito determinar las dificultades de los estudiantes en el proceso de modelación y determinar es el nivel de comprensión matemática en que se ubican según la teoría APOE .

-Fase de Intervención. Se buscó encontrar un mejoramiento en la comprensión de fenómenos físicos a través de la aplicación de una estrategia modelación matemática.

-Fase de Análisis. Utilizando la técnica de triangulación se analizan la información encontrada, se interrelaciona las categorías, hallazgos contrastándolo con las teorías y referentes conceptuales.

3.4. Trabajo de campo - Fase Diagnóstica

3.4.1 Propósito.

El propósito de la fase diagnóstica es determinar las dificultades en la comprensión que tienen los estudiantes al momento de aplicar un modelación matemática; se tuvo en cuenta que el

estudiante pudiera comprender el enunciado en la situación problemática, al momento de analizar una tabla de datos, en la elaboración de gráficas y al momento de determinar una expresión matemática que defina el fenómeno de variación propuesto

Los Instrumentos de recolección de la información que se determinaron fueron dos Actividad de modelación y el registro de datos a través de Diario de Campo.

3.4.2. Categorías de Análisis.

Se elaboró de acuerdo a la pregunta de investigación, los referentes teóricos y la unidad de análisis. La Tabla 1. Muestra las categorías, subcategorías y los indicadores de estudio a los cuales se les asignó un codificación que permitiera la elaboración y registro de información el posterior para su análisis; la forma de codificación utilizada I#Sub#C# permite definir el número de indicador, el número de subcategoría a la que pertenece y la categoría que se analiza.

Ejemplo: El código I1SUB2C1 significa que en los instrumentos de investigación se indagará sobre el primer indicador, de la subcategoría 2 en la categoría 1, que es “Formula, organiza, selecciona, los datos en un contexto determinado”.

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍA	INDICADOR	CÓDIGO
Modelación matemática (C1)	Concepto de Modelación Matemática. (Sub1)	-Noción de Modelación que se establece o investiga.	I1SUB1C1
		-Utiliza diferentes formas semióticas de representación, como la gráfica, y la función matemática.	I2SUB1C1
		Los contextos son significativos, a partir de los cuales se le facilita la Modelación	I3SUB1C1
		Interpreta coherentemente el contexto en relación con la con la representación matemática	I4SUB1C1
	Fases de la modelación (Sub21)	Formula, organiza, selecciona, los datos en un contexto determinado.	I1SUB2C1
		-Codifica y decodifica, es decir, pasa de los datos al fenómeno y viceversa.	I2SUB2C1
		-Uso de métodos matemáticos para generalizar relaciones entre magnitudes	I3SUB2C1

		-Interpretación de resultados y conclusiones -Generaliza el modelo matemático con el conocimiento teórico	I4SUB2C1 I5SUB2C1
Comprensión en matemáticas (C2)	Noción de Comprensión como proceso (Sub1I2)	-Realiza operaciones mentales de Identificación, discriminación, generalización y síntesis.	I1SUB1C2
	Niveles de Comprensión Matemática (Sub2I2)	-Realiza comprensión del planteamiento de la situación por modelar; toma la información y la sistematiza. Nivel 1 de Comprensión: (Inter) I	I1SUB2C2
		-Realiza la traducción de los datos a lenguaje matemático y los procesa matemáticamente. Nivel 2 (Intra)	I2SUB2C2
		-Interpreta y comprende el fenómeno de variación, lo modela matemáticamente y lo evalúa. Nivel 3 (Trans)	I3SUB2C2
	Conversión o transformación de representaciones (Sub3I2)	Está en capacidad para obtener o convertir a diferentes contextos semióticos de representación como gráficos o ecuaciones de variación.	I1SUB3C2
Pensamiento variacional (C3)	La Variable	-Se le dificulta comprender el uso y significados de la variable. -Se le dificulta interpretar y modelar ecuaciones. -Presenta dificultad para analizar la variación en general para explicar la manera de que un cambio en una cantidad produce un cambio en otra cantidad.	I1SUB1C3 I2SUB2C3 I3SUB1C3
	Comprensión de fenómenos de variación (Sub2I3)	Modeliza fenómenos de variación a partir de fórmulas matemáticas	I2SUB2C3

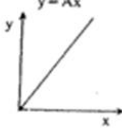
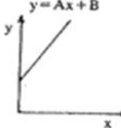
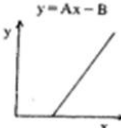
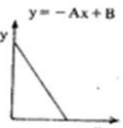
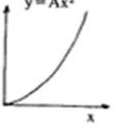
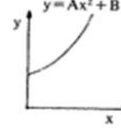
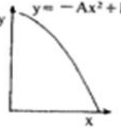
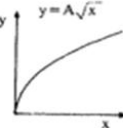
Tabla No 1 : Categorías, subcategorías y codificación.

3.4.3. Instrumentos de recolección de información

En la investigación cualitativa se utilizan diferentes instrumentos que permiten obtener y recopilar información sobre el objeto de investigación y las categorías; para el estudio de modelación se utiliza: la observación, bitácoras de campo, cuestionarios.

3.4.3.1. *Diario de Campo*. El docente investigador realizó el registro de información de hechos relevantes para la fase diagnóstica y para la fase de intervención. Se realizaron seis registros en los diarios de campo, dos para la actividad de la prueba diagnóstica en el primer semestre de 2106. El Anexo 1 muestra un registro en un formato del Diario de Campo.

PREGUNTA	CATEGORIA/SUBCATEG														
<p>“CAIDA DE UNA PIEDRA”</p> <p>Los datos de la caída de una piedra se muestran en la siguiente tabla de datos:</p> <table><tr><td>Tiempo (segundos) (x)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>Distancia de caída (metros) (y)</td><td>0</td><td>5</td><td>20</td><td>45</td><td>80</td><td>125</td></tr></table> <p>Con los datos anteriores realiza:</p>	Tiempo (segundos) (x)	0	1	2	3	4	5	Distancia de caída (metros) (y)	0	5	20	45	80	125	<p>CATEGORIA C1: MODELACION MATEMATICA</p> <p>I1SUB1C1: Noción de Modelación que se establece o investiga.</p> <p>I3SUB1C1: Los contextos son significativos, a partir de los cuales se le facilita la Modelación</p> <p>I4SUB1C1: Interpreta coherentemente el contexto en relación con la con la representación matemática</p>
Tiempo (segundos) (x)	0	1	2	3	4	5									
Distancia de caída (metros) (y)	0	5	20	45	80	125									
<p>Una gráfica distancia- tiempo para ilustrar estos datos. En el eje (x) ubica el tiempo empleado, en el eje (y) la distancia recorrida por la piedra.</p>	<p>I2SUB1C1: Utiliza diferentes formas semióticas de representación, como la gráfica, y la función matemática.</p> <p>I1SUB2C1: Formula, organiza, selecciona, los datos en un contexto determinado</p> <p>I1SUB2C2: Realiza comprensión del planteamiento de la situación por modelar; toma la información y la sistematiza. Nivel 1 de Comprensión: INTER</p> <p>I1SUB3C2: Está en capacidad para obtener o convertir a diferentes contextos semióticos de representación como gráficos o ecuaciones de variación.</p>														
<p>2. Al comparar el comportamiento de los datos del</p>	<p>I1SUB1C2: Realiza operaciones mentales de Identificación,</p>														

<p>tiempo y la distancia en la gráfica observe:</p> <p>¿Cómo varían los datos con respecto al eje (x) positivo y el eje y (y) positivo?</p> <p>¿Cuál es la variable dependiente y que valores toma? _____</p> <p>¿Cuál es la variable independiente y que valores toma? _____</p> <p>Puedes establecer un valor constante de proporcionalidad entre estas variables? A cuánto equivaldría?</p> <p>Describe la relación que existe entre la variación del eje (x) y la variación en el eje (y) en la gráfica que realizaste. Si es posible escribe una expresión matemática que muestre esta relación.</p>	<p>discriminación, generalización y síntesis</p> <p>I1SUB1C3: Se le dificulta comprender el uso y significados de la variable.</p> <p>I3SUB1C3: Presenta dificultad para analizar la variación en general para explicar la manera de que un cambio en un cantidad produce un cambio en otra cantidad.</p>
<p>¿Cuál de las siguientes gráficas se parece más a la gráfica que realizaste?</p> <div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: flex-start;"> <div style="margin-bottom: 10px;"> <p>Lineal</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;">     </div> </div> <div> <p>Cuadrática</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;">     </div> </div> </div> <p>-Escribe la ecuación de la gráfica similar a la que dibujaste en términos o letras de distancia (Δx), tiempo (t).</p>	<p>I2SUB2C1: Codifica y decodifica, es decir, pasa de los datos al fenómeno y viceversa</p> <p>I2SUB2C2: Realiza la traducción de los datos a lenguaje matemático y los procesa matemáticamente. Nivel 2 (Intra)</p>
<p>Con base en la ecuación que acabas de escribir, determina una expresión matemática (ecuación) que relacione la variación de las magnitudes distancia (Δx) en función del tiempo (t) para los datos de la tabla.</p>	<p>I3SUB2C1: Uso de métodos matemáticos para generalizar relaciones entre magnitudes</p> <p>I5SUB2C1: Generaliza el modelo matemático con el conocimiento teórico</p> <p>I2SUB2C3: Se le dificulta interpretar y modelar ecuaciones.</p>
<p>5. Si se lanza una piedra desde un avión. ¿Cuántos metros caerá en 6 segundos?</p>	<p>I4SUB2C1: Interpretación de resultados y conclusiones</p> <p>I5SUB2C1: Generaliza el modelo matemático con el conocimiento teórico</p> <p>I3SUB2C2: -Interpreta y comprende el fenómeno de variación, lo modela matemáticamente y lo evalúa. Nivel 3 (Trans)</p> <p>I2SUB2C3: Modeliza fenómenos de variación a partir de fórmulas matemáticas</p>

3.4.3.2. *Cuestionarios.* Diseñados y realizados con base a las etapas de la modelación. Para la fase diagnóstica se realizaron dos cuestionarios llamados Actividad Diagnóstica, la primera sobre una situación problemática de caída de una piedra, y la segunda sobre velocidad constante, estas pruebas se validaron a través de un docente experto, Magister en Docencia de la Matemática.

La población a la cual se aplicaron los instrumentos fue 34 estudiantes del grado 1001 de la IED Ricardo González de Subachoque. Se aplicó en 2 sesiones de clase de 3 horas cada una, aparecen en el Anexo 2.

Cada una de las actividades diagnósticas corresponde a una situación problemática con cinco ítems que buscan finamente verificar la comprensión de un fenómeno de variación a través de un proceso de modelación; estas preguntas buscan dar información sobre las categorías, subcategorías e indicadores siguiendo las etapas de modelación matemática de forma similar al modelo expuesto por Biembengut y Hein (2004). En la Tabla No.2 se muestra cómo se clasificó cada pregunta de la actividad No. 1 (Caída de una piedra) por categorías y subcategorías.

Tabla No 2: Cuadro de Clasificación de preguntas actividad diagnóstica No. 1 por categorías de análisis

3.4.4. Sistematización de la información Fase Diagnóstica

Los resultados de la Prueba Diagnóstica se registraron en una hoja electrónica de Excel. El registro de información se llevó a cabo a través de una matriz en la hoja electrónica programa Excel en el que se en las columnas se escribieron las cinco preguntas de la prueba con el código correspondiente a cada una de los indicadores que estudia dicha pregunta y en las filas se evalúa la obtención o no del indicador con los criterios LC: Logro Completo, LP: Parcialmente logrado,

LN: No logrado. En los diarios de campo se registran las observaciones y la justificación de ésta valoración de criterios de esta evaluación. Los resultados aparecen en el Anexo 3.

3.5. Trabajo de Campo - Fase de Intervención

3.5.1. Propósito

Plantear y aplicar una estrategia pedagógica que permita superar las dificultades y mejorar los niveles de comprensión utilizando la modelación matemática como alternativa pedagógica en la enseñanza de los fenómenos de variación en el contexto de los estudiantes de grado 1001 de la IED Ricardo González. Subachoque.

3.5.2. Instrumentos Utilizados

Con los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica y las dificultades que presentaron los estudiantes para esta actividad se escoge preferentemente una intervención pedagógica en la que los estudiantes puedan visualizar y completar etapas en el proceso de modelación, para ello el instrumento ideal para realizarlo es una secuencia didáctica que involucró a través de varias sesiones, actividades de modelación que permitieran mejorar los niveles de comprensión y las etapas de la modelación de un fenómeno de variación. Adicionalmente se utilizó el Diario de campo para registrar impresiones y observaciones en el desarrollo de la secuencia didáctica y registrar hechos relevantes para la fase de intervención. Se realizaron cuatro registros por parte del docente investigador, y se llevó a cabo en el segundo semestre de 2106.

3.5.3. Secuencia Didáctica

De manera similar a la fase diagnóstica, se diseñó una secuencia didáctica para cuatro sesiones de tres horas cada una en la que se revisaron los conceptos de proporcionalidad en general, variación proporcional rectilínea, variación proporcional cuadrática y variación

inversamente proporcional. La Tabla No. 3 muestra la planeación de la secuencia didáctica y el objetivo en cada actividad.

Semana		ACTIVIDADES	Objetivo
1	SESION 1 (3HORAS)	Modelación de proporcionalidad de áreas y volúmenes de un paralelepípedo	Comprensión del Concepto de proporcionalidad directa, inversa, constante de proporcionalidad
	SESION 2 (3 HORAS)	Modelación de la segunda Ley de Newton	-Comprensión del concepto de modelación -Modelar una fenómeno de variación en la que las variables hay una relación de proporcionalidad directa
2	SESIÓN 3	Modelación de un fenómeno de Caída Libre	Modelar una fenómeno de variación en la que las variables hay una relación de proporcionalidad directa pero no aumentan en la misma proporción (directamente correlacionadas)
4	SESION 4	Modelación de variación de Presion-Volumen	Modelar una fenómeno de variación en la que las variables hay una relación de proporcionalidad inversa (inversamente correlacionadas)

Tabla No3. Planificación de la Secuencia Didáctica

3.5.3.1. Organización de la secuencia didáctica. La secuencia didáctica se organizó en cuatro sesiones. En cada sesión se realiza una verificación de los conceptos previos del fenómeno de variación a modelar, enseguida se realiza una exposición de los conceptos teóricos del fenómeno y finalmente se plantea una situación de modelación d un fenómeno de variación propuesta para que los estudiantes la realicen. Esta situación de modelación consta de 12 preguntas de las letras *a* a la letra *l* y buscan dar información sobre las categorías, subcategorías e indicadores siguiendo las etapas de modelación matemática de forma similar al modelo expuesto por Biembengut y Hein (2004). En la Tabla No. 4 se muestra cómo se clasificó cada pregunta de la actividad por

categorías y subcategorías. La secuencia didáctica completa con las actividades de las cuatro sesiones se muestra en el Anexo No. 4.

PREGUNTA	CATEGORIA/SUBCATEG												
<p>SEGUNDA LEY DE NEWTON Fenómeno: Segunda Ley de Newton. $F = m \times a$</p> <p>La siguiente tabla muestra las fuerzas y las aceleraciones que experimenta una pelota al ser pateada por un jugador:</p> <table><tr><td>Fuerza (N)</td><td>1,8</td><td>3.6</td><td>5,4</td><td>7,2</td><td>9</td></tr><tr><td>Aceleración (m/s)</td><td>6</td><td>12</td><td>18</td><td>24</td><td>30</td></tr></table> <p>Con los datos anteriores determina: Las variables que intervienen en el enunciado son : _____ El fenómeno que se describe es: _____</p>	Fuerza (N)	1,8	3.6	5,4	7,2	9	Aceleración (m/s)	6	12	18	24	30	<p>CATEGORIA C1: MODELACION MATEMATICA I1SUB1C1: Noción de Modelación que se establece o investiga. I3SUB1C1: Los contextos son significativos, a partir de los cuales se le facilita la Modelación I4SUB1C1: Interpreta coherentemente el contexto en relación con la con la representación matemática</p>
Fuerza (N)	1,8	3.6	5,4	7,2	9								
Aceleración (m/s)	6	12	18	24	30								
<p>¿La primera variable aumenta o disminuye? _____ ¿La segunda variable aumenta o disminuye? _____ ¿Qué relación existe entre las variables (K) es proporcional? _____ ¿Cuál es la variable dependiente? _____ ¿Cuál es la variable independiente? _____ ¿Qué representa la constante K en el fenómeno?</p>	<p>I2SUB1C1: Utiliza diferentes formas semióticas de representación, como la gráfica, y la función matemática. I1SUB2C1: Formula, organiza, selecciona, los datos en un contexto determinado I1SUB2C2: Realiza comprensión del planteamiento de la situación por modelar; toma la información y la sistematiza. Nivel 1 de Comprensión: INTER I1SUB3C2: Está en capacidad para obtener o convertir a diferentes contextos semióticos de representación como gráficos o ecuaciones de variación. I1SUB1C2: Realiza operaciones mentales de Identificación, discriminación, generalización y síntesis I1SUB1C3: Se le dificulta comprender el uso y significados de la variable. I3SUB1C3: Presenta dificultad para analizar la variación en general para explicar la manera de que un cambio en un cantidad produce un cambio en otra cantidad.</p>												
<p>Realiza la gráfica de la situación planteada Realiza la gráfica de la situación planteada ¿Cuál de las siguientes gráficas se parece más a la gráfica que realizaste?</p>	<p>I2SUB2C1: Codifica y decodifica, es decir, pasa de los datos al fenómeno y viceversa I2SUB2C2: Realiza la traducción de los datos a lenguaje matemático y los procesa matemáticamente. Nivel 2 (Intra)</p>												

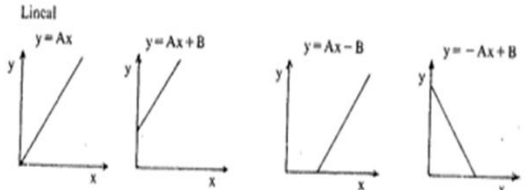
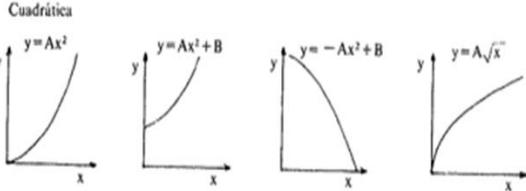
<p>Lineal</p>  <p>Cuadrática</p> 	
<p>k) Escribe la expresión matemática (ecuación) del fenómeno</p>	<p>I3SUB2C1: Uso de métodos matemáticos para generalizar relaciones entre magnitudes I5SUB2C1: Generaliza el modelo matemático con el conocimiento teórico I2SUB2C3: Se le dificulta interpretar y modelar ecuaciones.</p>
<p>l) Escribe la expresión matemática en términos científicos Ecuación con los símbolos o letras</p>	<p>I4SUB2C1: Interpretación de resultados y conclusiones I5SUB2C1: Generaliza el modelo matemático con el conocimiento teórico I3SUB2C2: -Interpreta y comprende el fenómeno de variación, lo modela matemáticamente y lo evalúa. Nivel 3 (Trans) I2SUB2C3: Modeliza fenómenos de variación a partir de fórmulas matemáticas</p>

Tabla No. 4. Clasificación de preguntas. Sesión 1. De la Secuencia Didáctica

3.5.4. Sistematización de la información Fase de Intervención

Se llevó a cabo a través de un matriz en la hoja electrónica programa Excel, en las columnas se escribieron las doce preguntas de la prueba con el código correspondiente a cada una de los indicadores que estudia dicha pregunta y en las filas se evalúa la obtención o no del indicador con los criterios LC: Logro Completo, LP: Parcialmente logrado, LN: No logrado. En los diarios de campo se registran las observaciones y la justificación de ésta valoración de

criterios de esta evaluación. Evidencia aparece en el Anexo 5. para la Sesión 2. Ley de la Fuerza.

3.6. Condiciones éticas

Se hace necesario hacer claridad sobre la participación de los estudiantes y la autorización de sus padres de familia en la presente investigación. La totalidad de los estudiantes del grado 1001 de la IED Ricardo González estuvieron de acuerdo en la participación y el destino dado a la información que de ellos se pudo extraer a través de las diferentes actividades del estudio. Los padres de familia o acudientes de los estudiantes manifestaron por escrito un consentimiento informado de la participación de sus hijos en el proyecto y autorizado el uso que se daría a la información recopilada, esto se evidencia en el Anexo 6. (Consentimiento informado).

3.7. Hipótesis de la intervención

Los estudiantes presentan dificultades al momento de realizar modelación matemática Debido a que no comprenden fenómenos de variación debido a unos escasos conocimientos en proporcionalidad, magnitudes y relaciones entre variable; porque los conceptos no les han sido enseñados de una manera significativa ni han realizado ejercitación en procesos de modelación. Adicionalmente para los docentes la implementación de la estrategia de modelación se dificulta debido al diseño de situaciones problema, el corto tiempo en el currículo y la poca literatura al respecto.

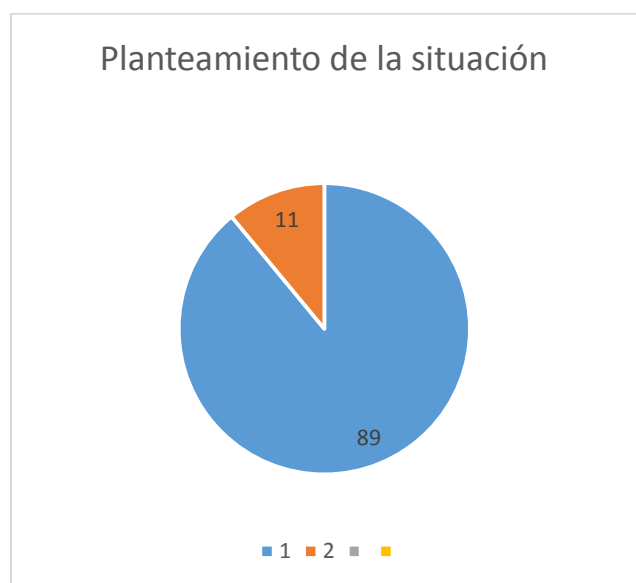
CAPÍTULO 4. RESULTADOS

Una de las características propias de la Investigación Acción es la de realizar la presentación de los hallazgos del diagnóstico y la intervención a la comunidad académica y servir para el análisis de los datos obtenidos.

3.1. Hallazgos Fase Diagnóstica

4.1.1. Comprensión del enunciado o fenómeno modelar

Para el planteamiento de la situación a modelar, El 89% de los estudiantes comprende completamente la situación problemática a resolver y el contexto en que está inmerso. El 11% lo logra parcialmente. No pueden comprender el significado de los conceptos distancia y tiempo.



4.1.2. Elaboración de la gráfica del fenómeno

En la pregunta 1, El 71% de los estudiantes logra realizar el dibujo de la gráfica en el plano cartesiano, el 19% tienen dificultades para elegir una escala ubicarla en el papel o determinar la magnitud de cada unidad en los ejes o problemas para unir los puntos; un 10% no pueden realizar la gráfica.



Para el caso del estudiante MY cuando en la pregunta sobre realizar la gráfica de la proporcionalidad en caída libre, la realiza de manera rectilínea y no tiene en cuenta que corresponde a una gráfica cuadrática.

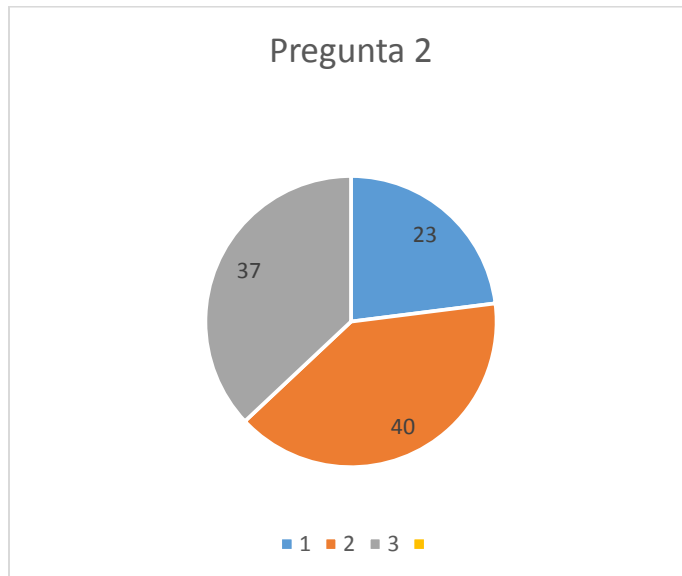


Error en la graficación pues traza la gráfica en línea recta y corresponde a una proporcionalidad cuadrática

4.1.3. Variación de las magnitudes, determinar la constante de proporcionalidad

Para la pregunta 2, solamente el 23% de los estudiantes puede contestar y resolver completamente las preguntas de variación de las magnitudes ,determinar una constante aproximada ; el 40%

parcialmente logran determinar cual es la variable dependiente, cual la independiente y el valor de la constante, un 37% no logran comprender o contestar esta pregunta de acuerdo a la gráfica.



La respuesta del el estudiante SL en la que realiza mal el cálculo de la constante de proporcionalidad, evidencia no comprende como determinarla.

hallaste escribe la ecuación que relacione la distancia con el tiempo.

$$y = a \cdot x \quad a = \frac{y}{x}$$

$a = 5 \text{ m/s} / 1 = 5$

$a = 20 / 2 = 10$

$a = 45 / 3 = 15$

$a = 80 / 4 = 20$

$a = 125 / 5 = 25$

Varia de 5 en 5

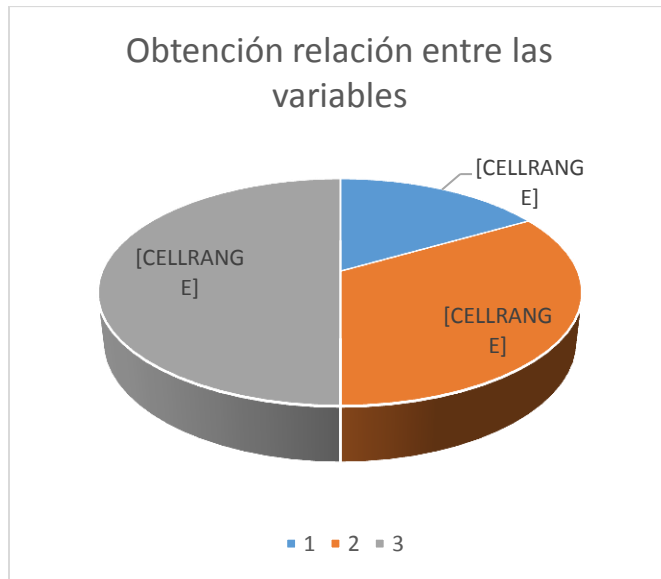
① con la ecuación que determinas te calcula la distancia de caída a los 6 seg

$a = 180 / 6 = 30$

Error en el cálculo de la constante de proporcionalidad

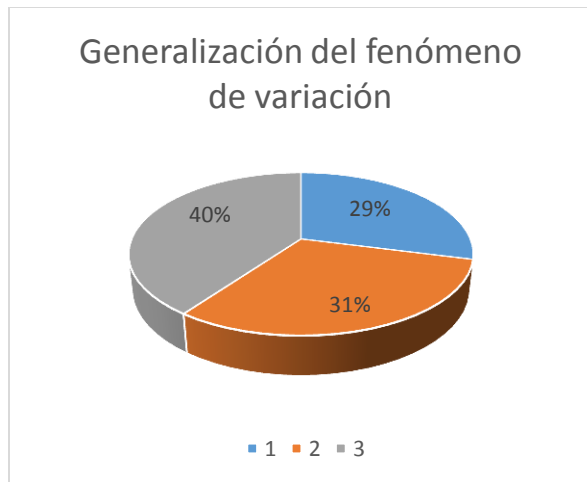
4.1.4. Obtención de la expresión que relaciona las variables en términos de x y y.

Para a pregunta 3 el 69% de los estudiantes logran parcialmente contestarla mostrando dificultad para obtener una relación matemática, solamente 6 estudiantes pudieron llegar a obtener una relación aproximada.



4.1.5. Generalización y obtención de una expresión sobre el fenómeno de variación

En la pregunta 4, solamente el 29% puede llegar a obtener una generalización con la ecuación que se planteó, otro grupo la completa parcialmente llegando por ensayo y error al valor de la distancia para los 6 segundos. Un alto porcentaje de estudiantes 40% no la logra.



El estudiante VA puede llegar a obtener un resultado de la ecuación para la proporcionalidad cuadrática pero no puede escribir la expresión que generaliza el fenómeno de variación, es decir no completa las etapas de la modelación.

c-) $V = ax^2$ $a = 5$

d-) $5 \times 6^2 = 180$

El estudiante (VA) no completa la modelación, ni la escribe en los términos del fenómeno planteado.

Los estudiantes tienen dificultades en lograr realizar el proceso de simulación porque tiene vacíos en la conceptualización y elaboración de problemas o situaciones que les exijan realizar modelaciones; se observa que existen vacíos también en el aprendizaje de la conceptualización de variaciones, variable y constantes de proporcionalidad en funciones.

Las gráficas las saben realizar en general, pero el interpretar los cambios en las graficas es de gran dificultad para ello; convertir letras y numeros a simbolos de elementos de un fenomeno se les dificulta, es dar el paso de ecuaciones generales a expresiones matematicas que describen fenómenos.

La mayor dificultad se encuentra en elaborar una expresion matemática que describa o generaliza una variación , para ello solicitan un método o forma de encontrarlo, no lo logran a simple vista de la gráfica o los datos de la tabla.

El nivel de comprensión matemática se ubicaría en el nivel 2, nivel *Intra* es decir, un porcentaje de los estudiantes examinados apenas realizan la traducción de los datos a lenguaje matemático y los procesan matemáticamente.

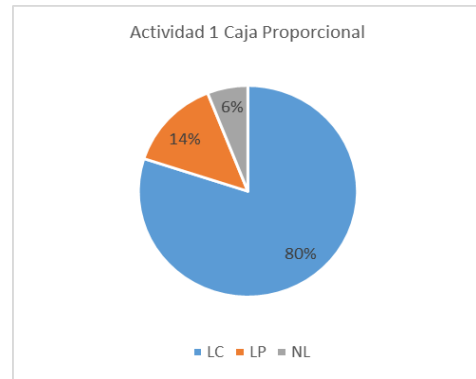
4.1.6. Conclusión general de la aplicación de este instrumento

La actividad diseñada no da cuenta de la realización completa de la modelación por parte de los estudiantes pues los puntos requeridos en la actividad son incompletos ante la cantidad de dudas y vacíos que tienen los estudiantes bien sea por carencias en el dominio de los conceptos previos o porque se necesita de mayor numero de instrucciones con mayor claridad y exactitud en la actividad para que puedan realizar completo un proceso de modelación. El instrumento se debe reajustar o cambiar para que el contexto de la situación problemática y en general los puntos a evaluar sea más sistemático y permita examinar en detalle los indicadores de la fase 3 y 4 que no son visibles en este instrumento.

3.2. Resultados de la Fase de Intervención

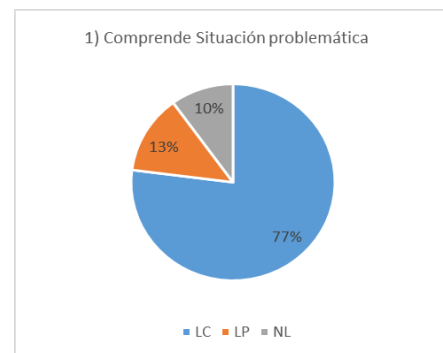
4.2.1. Sesión 1: Paralelepípedo rectangular

El 80% de los estudiantes obtienen el resultado completo de la actividad, llegando a determinar las ecuaciones que modelizan las variables área, volumen, perímetro de acuerdo a los datos de la situación problemática

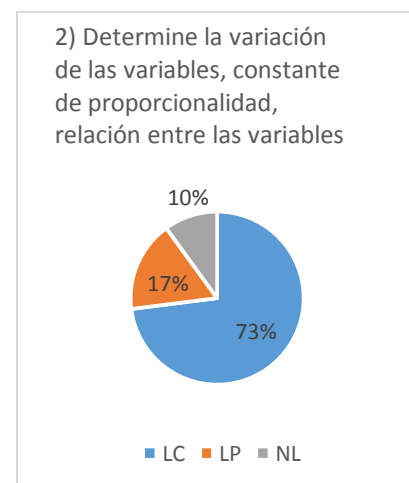


4.2.2. Sesión 2: Proporcionalidad Directa

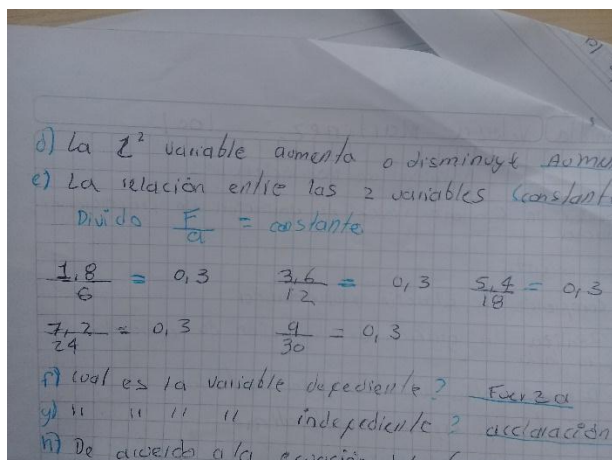
1) El 77% de los estudiantes comprende la situación problemática y responde a las preguntas planteadas, un 13% responden con errores y un 10% no comprenden la situación problemática.



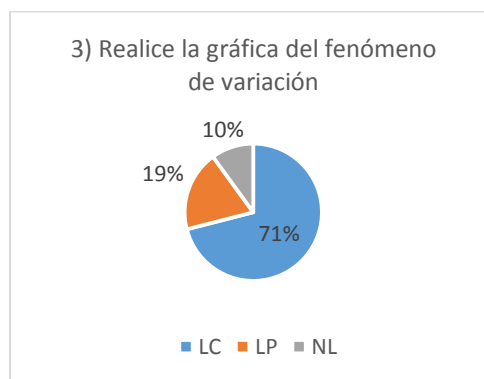
2) El 73% de los estudiantes logran determinar una constante de proporcionalidad y relacionar variables, un 17% no lo hacen completamente.



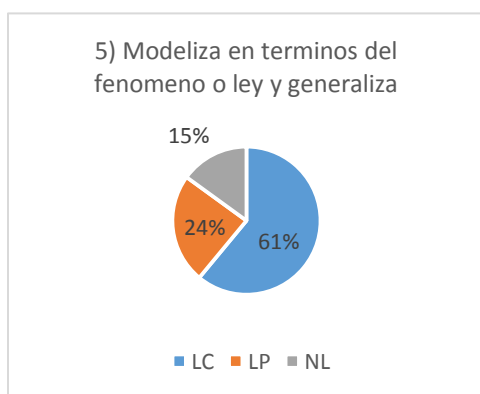
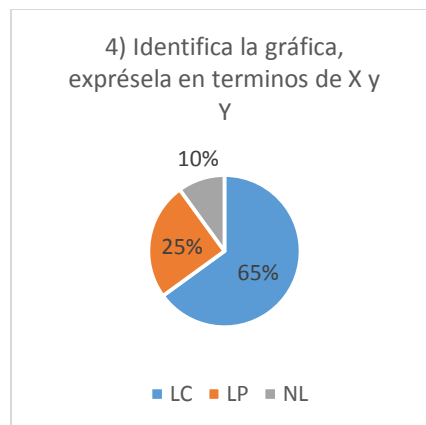
La estudiante (MR) determina correctamente la constante de proporcionalidad para la proporcionalidad rectilínea fruto de la comprensión en la modelación y la variación de las magnitudes



3) El 71% de los estudiantes realizan la grafica completa y correctamente, un 19% no la completan, solo 10% no pueden construir la gráfica.

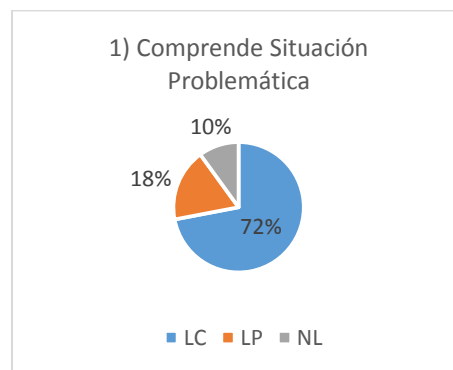


4) El 65% de los estudiantes identifican la
 5) El 61% de los estudiantes logran determinar la expresión matemática de la proporción directa planteada, el 24% no la identifican completamente y el 15% no pueden escribirla.



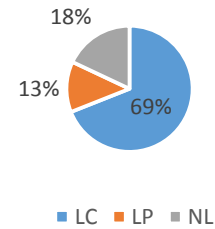
4.2.3. Sesión 3. Proporcionalidad cuadrática

1) El 72% de los estudiantes comprenden el enunciado y la situación a modelar, el 18% no la comprenden completamente y el 10% no pueden escribirla.



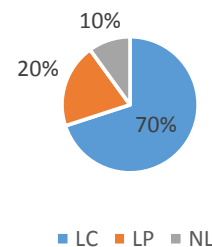
2) El 69% de los estudiantes logran determinar una constante de proporcionalidad y relacionar variables, un 13% no lo hacen completamente; un 18% no lo logran.

2) Determine la variación de las variables, constante de proporcionalidad, relacion entre las variables



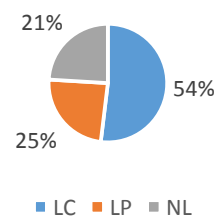
3) El 70% de los estudiantes realizan la grafica de 2do. grado completa y correctamente, un 20% no la completan, solo 10% no pueden construir la gráfica.

3) Realice la gráfica del fenómeno de variación

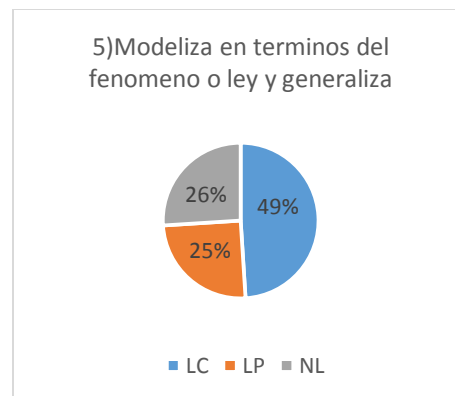


4) El 54% de los estudiantes identifican la gráfica cuadrática y a qué clase de proporción corresponde, un 25% no la identifican con exactitud aunque se aproxima, el 21% no la pueden identificar.

4) Identifica la gráfica, exprese la en términos de X y Y



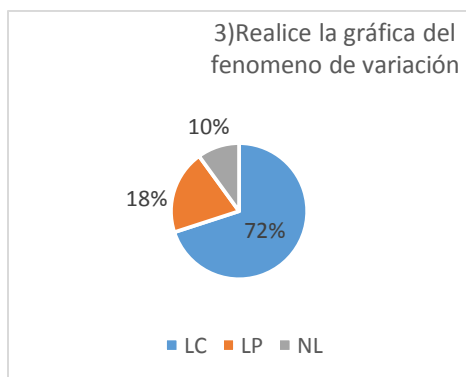
5) El 49% de los estudiantes logran encontrar la expresión matemática del fenómeno y lo generalizan, un 25% no la identifican con exactitud aunque se aproxima, el 26% no la pueden identificar.



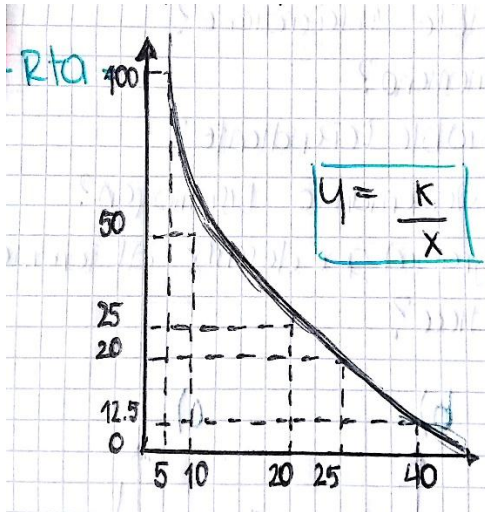
3.2.4. Sesión 4. Proporcionalidad inversa (Ley de Boyle)

Realiza la gráfica del fenómeno de variación

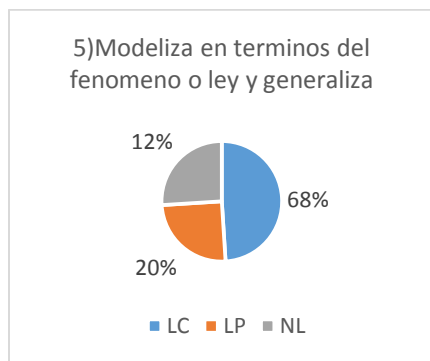
El 72 % de los estudiantes elaboran la gráfica completamente representando la proporcionalidad inversa. Un 18% la elaboran con algún error como por ejemplo la manera como determinan la escala.



La gráfica del estudiante GS muestra la gráfica correcta de la proporción inversa Presión-Volumen con la selección de los ejes, escalas apropiadas y la variación de acuerdo a la constante



Modela en términos del fenómeno y lo generaliza



El 68% de los estudiantes encuentran la expresión del fenómeno y lo generalizan para los valores que se soliciten en la actividad; un 20% no lo logran debido a que no llegan a la generalización o se confunden en el despeje de las magnitudes o incógnitas.

El estudiante VD determina la expresión matemática que describe el fenómeno de variación dejándola en valores de presión volumen y con la constante hallada correctamente, adicionalmente responde correctamente a la pregunta final de calcular la presión para un volumen de 100.

i) $Rto = x \cdot y = 500.$
 j) $Rto = v \cdot p = 500.$
 k) $Rto = 500 \div 100 = 50$

$$\frac{P = 500}{v}$$

$$\frac{y = 500}{x}$$

3.2.5. Comparación Fase Diagnóstico vs. Intervencion

Con los porcentjes, obtenidos para cada una de las etapas de la modelación se elabora la Tabla No. 5 que muestra una comparación de los resultados y se muestra el mejoramiento de la comprensión a través de la aplicación de una estrategia de secueencia didáctica.

ETAPAS DE LA MODELACIÓN	FASE DIAGNÓSTICA	FASE DE INTERVENCIÓN	NIVEL DE COMPRENSIÓN
Formulación del problema	52%	70%	Nivel 1. Intra
Sistematización	50%	71%	Nivel 2: Inter
Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático	45%	71%	
Elaboración de objeto matemático que puede definir la modelación y	37%	69%	Nivel 3. Trans.
Interpretación de los resultados. Generalización	30%	69%	

Tabla No. 5. Comparación de resultados Fase Diagnóstica vs. Fase de Intervención

4.2.6. Resultados Categoría Proceso de Modelación

El 70% de los estudiantes en todas las sesiones comprenden afirmativamente el enunciado de la situación de variación a modelar. Preguntas (a,b)

Un 71% de los estudiantes logran realizar la sistematización y la elaboración de gráficas, con algunos errores un 20%, menos de un 9% realizan correctamente la representación gráfica y la identificación de variables

Un 69% realizan completa y correctamente las etapas finales obteniendo un objeto o expresión matemática y generalizándolo a otros valores de dicha expresión. 20% lo logran parcialmente.

4.2.7 Resultados Categoría comprensión matemática

La mayoría de estudiantes (59%) logran construir las expresiones matemáticas solicitadas en las actividades y las generalizan lo que permite decir que se ubican en el nivel de comprensión matemática TRANS de la teoría APOE de Dubinsky.

Un 31% de los estudiantes encuentran las relaciones entre las variables y las pueden explicar mediante la elaboración de los cálculos o representaciones gráficas. Aunque presentan errores, en percepción o escritura, más no en la comprensión. Se ubican en el nivel INTER

Una minoría de los estudiantes no comprende la situación a modelar ni lo que deben lograr.

Presentan problemas en comprensión lectora, lenguaje matemático, operacionalización de expresiones, poseen prejuicios sobre la matemática que no los motiva a realizar nada; son aproximadamente 4 estudiantes (10%) y se ubicaron en el nivel básico o INTRA pues no relacionan más de 2 objetos matemáticos.

4.2.8. Resultados en cuanto a la categoría Pensamiento variacional

La estrategia de modelación con el dominio de los saberes previos necesarios como la proporcionalidad permite la comprensión de los conceptos de proporcionalidad directa e inversa.

La representación gráfica permite al estudiante lograr obtener expresiones matemáticas de una situación de variación más fácilmente dentro de un marco de modelación matemática.

Los conceptos previos y necesarios en la representación gráfica deben estar claros en cuanto a la escogencia de unidades y escala de medida.

Persiste dificultad en trasladar el lenguaje matemático al lenguaje de las ecuaciones de la situación física

3.3. Fase de Análisis

4.3.1. Análisis por categorías. Triangulación

En este apartado realizaremos una triangulación entre las categorías de análisis, los resultados y los referentes conceptuales consultados. En la Tabla 6 se muestra la triangulación

CAT.	DIAGNOSTICO		INTERVENCIÓN
MODELACION MTEMÁTICA		La mayoría de estudiantes no pueden iniciar el proceso de modelación, obtienen dudas sobre lo que debe realizarse en cada etapa; no comprenden el enunciado del fenómeno a modelar ni cómo llegar a la expresión matemática que lo describe. Los estudiantes en su mayoría no comprenden el fin de una tabla de datos o una representación en el plano cartesiano	A través de la secuencia didáctica los estudiantes comprenden cuál es el propósito de la modelación matemática y las etapas que la componen dentro de la descripción de un fenómeno o situación problemática. La mayoría comprenden y analizan cuadros y tablas y logran representar situaciones problemáticas en una gráfica cartesiana.
COMPENSIÓN MATEMÁTICA	Nivel Intra	La mayoría de estudiantes les causa dificultad comprender el enunciado de una situación o fenómeno	Todos los estudiantes comprenden lo que se quiere encontrar o resolver en una situación problemática o fenómeno a modelar matemáticamente.
	Nivel Inter	Un porcentaje bajo de estudiantes logra entender y comprender la proporcionalidad entre magnitudes	A la mayoría de estudiantes se le facilita establecer relaciones de proporcionalidad directa, inversa, cuadrática y comprenden el significado de una proporción

	Nivel Trans.	No existen estudiantes que logren ubicarse en el nivel Trans. No logran determinar la expresión que describa el fenómeno o situación problemática	Más de la mitad de los estudiantes logran llegar a una expresión matemática que describe el fenómeno, la mayor dificultad se encuentra en obtener expresiones de proporcionalidad cuadrática
VARIACIONES MATEMÁTICA	Proporcionalidad	La mayoría de estudiantes no comprenden o lo hacen de manera superficial la proporcionalidad entre dos cantidades	A través de la secuencia didáctica de cajas, determinando áreas y volúmenes los estudiantes logran comprender la relación de proporcionalidad entre dos magnitudes y permite el inicio en las etapas de la modelación
	Proporcionalidad Directa	Se realiza de manera acertada en la mayoría de los estudiantes, sin embargo no es clara la forma de calcular proporcionalidad, ni la constante “k” de proporcionalidad.	La relación directamente proporcional entre dos magnitudes se hace más evidente y clara con la modelación y específicamente en la observación y análisis de la linealidad de la gráfica entendiendo que el aumento en una cantidad del eje x, produce un aumento en la cantidad del eje y. (Actividad del resorte. Sesión 2)
	Proporcionalidad cuadrática	Para la mayoría NO es entendible	La proporcionalidad cuadrática se hace comprensible debido a que identifica el tipo de gráfica que se realiza y sirve de partida para determinar una constante de proporcionalidad y una expresión matemática que representa el fenómeno. (Sesión 3)
	Proporcionalidad inversa	Los estudiantes no comprenden la noción de una proporción inversa ni solucionan una situación matemática que tenga que ver con la proporción inversa	Al realizar las diferentes etapas de la modelación los estudiantes en su mayoría logran realizar una gráfica y establecer una expresión matemática que modela la relación entre una magnitud o cantidad que aumenta y una cantidad que disminuye. (Sesión 4)

Tabla No 6. Triangulación de la información

4. CONCLUSIONES

La estrategia de modelación matemática, adecuadamente diseñada y desarrollada por parte del docente, (SECUENCIA DIDÁCTICA) permite mejorar la comprensión matemática en las situaciones que involucran variación de magnitudes; sin embargo se necesita que el recurso de

enseñanza sea propicio para el desarrollo de cada una de las etapas de la modelación, con el fin de obtener la verdadera comprensión del fenómeno a estudiar.

La comprensión de objetos matemáticos logra ascender a un nivel mayor con la utilización de estrategias de modelación pertinentes teniendo en cuenta enunciados claro el dominio de saberes previos de objetos matemáticos, análisis de cuadros y tablas de datos, diseño, elaboración y análisis de gráficos, realización de procedimientos matemáticos (operaciones) para obtener una expresión matemática correcta de un fenómeno o situación problemática. La falta de comprensión de los enunciados exige al docente realizar la tarea de activar los conocimientos previos que tienen los estudiantes o la adquisición de dichos conocimientos necesarios para su utilización en el desarrollo posterior.

Aunque la modelación matemática depende del fenómeno a estudiar y necesita articulación por parte del docente, lograr un resultado completo en las etapas de modelación es un indicio de la existencia o no comprensión y permite la ubicación en un nivel de comprensión respectivo.

La secuencia didáctica es un instrumento útil y pertinente para la realización del proceso de modelación pues realizado de forma didáctica y específica de las necesidades del estudiante brinda facilidad en la comprensión; sin embargo es recomendable que pueda ser articulada y diseñada utilizando herramientas aplicaciones y programas de TICS que hagan dinámico y motivador el proceso de aprendizaje.

El profesor debe poder reconocer las posibilidades y limitaciones que la modelación matemática ofrece y planear estrategias para atender los desafíos que tiene al implementar cada una de ellas. La modelación matemática no tiene un alcance absoluto en la enseñanza, sino que está correlacionado con los propósitos de la manera como el profesor desarrolla el proceso en el aula

de clase pero si es debe considerarse como alternativa de enseñanza para la comprensión de situaciones problemáticas elaboradas para los grados de 10° y 11°.

5.1. Recomendaciones

Es oportuno por parte del docente seleccionar cuidadosamente el fenómeno o situación problemática a modelar pues no todas son susceptibles de aplicar esta estrategia y podría resultar en un efecto contraproducente que lleve al estudiante a mayores vacíos y confusiones en su aprendizaje de la variación.

Además, en la enseñanza de modelación por medio de representaciones gráficas es importante que el estudiante domine aspectos como escala de unidades, escogencia de ejes, variable independiente, variable dependiente, magnitudes, para poder partir desde un nivel de comprensión 2 (Inter) que lo lleve mas facilmente al nivel 3 (Trans).

Finalmente, con el ánimo de que la comprensión se desarrolle y aplique en contextos significativos es propicio utilizar las Tecnologías de Información y Comunicación como programas de enseñanza de matemáticas, video tutoriales, simuladores y otras herramientas dentro del diseño de la secuencia didáctica y la modelación para dar mayor interés, curiosidad y dinámica al proceso de aprendizaje.

5.2 Limitantes

La comprensión de fenómenos físicos o de fenómenos de la naturaleza que se estudian en ciencias como la Física, Química o Biología requieren de un método propio que logre explicar las leyes, teorías y conceptos que los científicos han postulado para explicarlos o describirlos; en caso de la investigación científica a través de la experimentación, análisis y observación, los científicos se han acercado a las respuestas que han planteado sobre el mundo y la naturaleza

utilizando saberes diferentes a los contenidos en las Ciencias Naturales como es el caso de las Matemáticas.

La matemática es un instrumento que ayuda a la descripción o demostración de leyes que los científicos han planteado sin embargo es de aclarar que no todos las teorías o leyes de las ciencias naturales son susceptibles de explicarse a través de las matemáticas o de modelación matemática; por lo anterior es necesario señalar que los fenómenos de la Física no pueden ser explicados o demostrados solamente con el planteamiento de un modelo matemático sino que el modelo mismo es un apoyo dentro de un trabajo mayor como es el método científico.

Por ello una limitante del presente proyecto de investigación es asumir que la comprensión del fenómeno físico se realiza de una manera estrictamente matemática definiendo únicamente el fenómeno físico como una situación de variación o cambio de una variable sin tener en cuenta demás atributos o condiciones que posee el fenómeno dentro del conocimiento de las Ciencias Naturales.

Para el presente proyecto de investigación se hace la claridad que no se tuvo en cuenta la comprensión del fenómeno físico que hace el estudiante desde las ciencias naturales sino la comprensión que realiza de una situación de cambio o variación de cantidades.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Arrieta, Jaime; Cordero, Francisco; Cârsteanu, Alin; Mena, Jaime; Rodríguez, Ruth; Romo, Avenilde; Solís, Miguel; Suárez, Liliana (2009). *La modelación y la tecnología en las prácticas de enseñanza de las matemáticas*. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta

- Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1717-1726). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C..
- Biembengut, M., y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16(2), 105-125.
- Blomhøj, Morten. (2008). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. *Revista FAMAF*. Volumen 23. Tomado de:
http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_23/23_2_Modelizacion1.pdf
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. W., y Niss, M. A. (Eds.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study*. New York: Springer.
- Cantoral, R., Farfán, R.M., Cordero, F., Alanís, J.A., Rodríguez, R.A. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.
- Castiblanco, A., Moreno, L., Rodríguez, F., Acosta, M., & Camargo, L. (2001). Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de matemáticas de la educación media de Colombia. II Fase: Profundización y Expansión.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.
- Díaz-Godino, J. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno*, 25, 77-87.
- ELLIOT, John. *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Morata, 2000
- Gallardo, Jesús (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números*

naturales. Doctorado tesis, Universidad de Málaga. Recuperado de:

<http://funes.uniandes.edu.co/625/2/Gallardo2004Diagnostico.pdf>.

Noviembre 5 de 2015

Gómez, P. (1996). Una comprensión de la comprensión en matemáticas. *Revista EMA*, 1(3), 233-243. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/315/1/GomezP96-1590.PDF>,

Noviembre 6 de 2015

Giordano F., Weir M., Fox W. (1997). *A first Course in Mathematical Modeling*.

Brooks/Cole Publishing Company.

Habermas, J. (1981). Teoría de la acción comunicativa I. Madrid: Taurus, 1999 (Ed.

Usada).

Küchemann, D.E. *The understanding of generalised arithmetic by secondary school children*.

Unpublished doctoral dissertation. Chelsea College, University of London. 1980.

Latorre, A., del Rincón Igea, D., & Arnal, J. (1996). Bases metodológicas de la investigación educativa. Barcelona: Ediciones experiencia, 2005

Meel, D. (2003,). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE.

Relime Vol. 6, No. 3, 221-271.

Ministerio de Educación Nacional. (2007). Estándares básicos de competencias. Bogotá:

Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Bogotá:

Magisterio.

Osorio, F. C., Téllez, L. S., Lorca, J. M., Vera, J. A., Rodríguez, R., Gallegos, A. R. V.,... & Esquinca, M. S. LA MODELACIÓN Y LA TECNOLOGÍA EN LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.

Perkins, David (1999), "¿Qué es la comprensión?", en Martha Stone Wiske (ed.), *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*, Buenos Aires, Paidós, pp. 69-92. Tomado de:

http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_nlinks&ref=4523339&pid=S0185-2698201500050000500015&lng=es

Quintanilla, M. A. (1979). *Diccionario de filosofía contemporánea*. Salamanca: Sígueme.

Rodriguez, Milagros Elena (2011). *La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico*. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77, pp. 35-49 . Tomado de: <http://funes.uniandes.edu.co/3583/1/Elena2011LaNumeros77.pdf>

Russell, B., & Whitehead, A. N. (1968). *Principia mathematica*. Cambridge University Press.

Schank, R. C. (1988). Una explicación de la inteligencia. En R. J. Sternberg y D. K.

Detterman (Eds.) ¿Qué es la inteligencia? Enfoque actual de su naturaleza y definición (pp. 147-158). Madrid: Pirámide

Sierpiska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Suárez, L. (2008). *Modelación–graficación, una categoría para la matemática escolar*.

Resultados de un estudio socioepistemológico (Tesis inédita de doctorado). Cinvestav-IPN, México, D.F.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. En A. F.

Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12 (1988 Year book of the National Council of Teachers of Mathematics)* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM

Vasco, C. (2006). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Villa-Ochoa, J. (2007). *La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo*. Tecno Lógicas, 19, 63-85.

Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz, M. (2009). Modelación en Educación Matemática. Una mirada desde los Lineamientos y Estándares Curriculares Colombianos. *Revista Virtual-Universidad Católica del Norte* (27), 1-21

UNIVERSIDAD EXTERNADO FACULTAD DE EDUCACIÓN MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

PROYECTO DE GRADO:

“Estrategia de Modelación matemática para la comprensión de un fenómeno físico de variación

DIARIO DE CAMPO: OBSERVACIÓN PARTICIPANTE

Instrumento No 1	Fecha <u> </u> Mayo 25 de 2016	
Aplicado por: Carlos Alberto Silva J.	Docente investigador Carlos Alberto Silva Jiménez	
Instrumento No <u> </u>	Nombre: prueba diagnóstica	
	Actividad:	
Estudiante : LS, EV, SH, AP, HR, XB, SG	Grupo:	
Registro Natural	Categorías de análisis C1: MODELACION MATEMATICA C2: COMPRENSIÓN MATEMATICA C3: PENSAMIENTO VARIACIONAL	
Descripción paso a paso de lo que se observa Preguntas 1) Establecer un procedimiento o técnica para elaborar las gráficas del fenómeno	C1: MODELACION MATEMATICA 1 SUBI1 : SUBCATEGORÍA: CONCEPTO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA Los estudiantes realizan gráficas de modelación en el plano cartesiano...I1SUB2C1 Varios grupos manifiestan que no pueden ubicar los puntos de la tabla en la gráfica, por ejemplo LS me pregunta: <i>-Profe, profe, como hago para poer esos puntos, en que eje,,como si?... no entiendo...no entiendo, explique</i> Esto lo manifiestan también las estudiantes EV, SH, AP. Los estudiantes HR, XB, SG lo realizan con dudad en la escala	
Conclusión general de la aplicación de este instrumento: Existen estudiantes que no pueden realizar la gráfica de acuerdo a los datos de la tabla Descripción muy general de los aspectos significativos observados: Expresan ansiedad de continuar con los siguientes puntos de la prueba.		

Anexo 2. Actividades Fase Diagnóstica



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: Estrategia de Modelación matemática para la comprensión de un fenómeno físico de variación.

IED RICARDO GONZALEZ. SUBACHOQUE

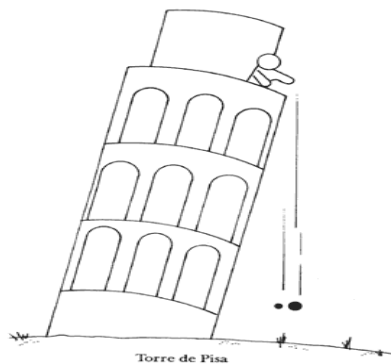
PRUEBA DIAGNÓSTICA 1: “CAIDA DE UNA PIEDRA”

Nombre y Apellidos _____

Curso _____ **Fecha** _____

Propósito: Señor estudiante el siguiente instrumento tiene como propósito encontrar elementos que permiten identificar fortalezas y debilidades que presenta en el proceso de modelación.

“CAIDA DE UNA PIEDRA”

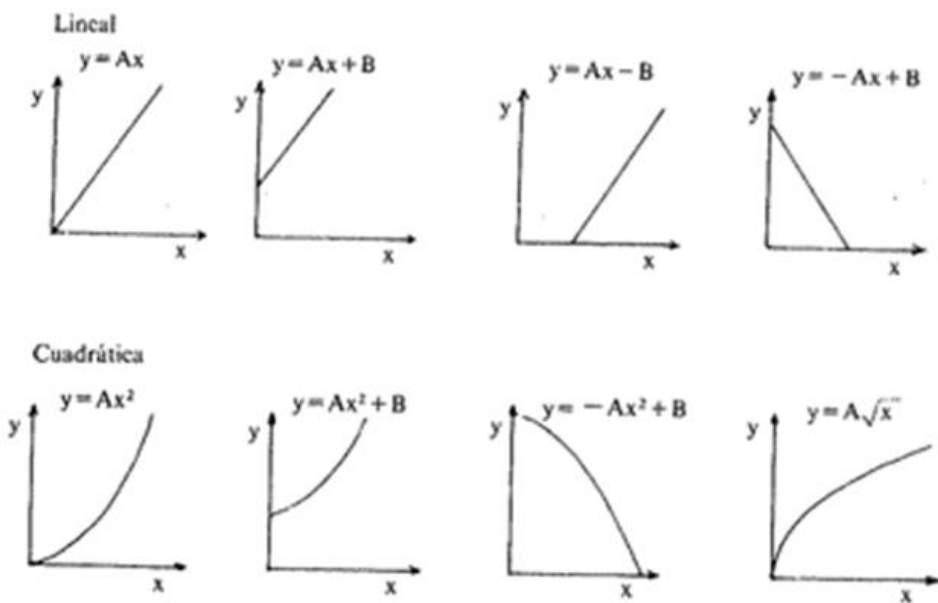


Los datos de la caída de una piedra se muestran en la siguiente tabla de datos:

Tiempo (segundos) (x)	0	1	2	3	4	5
Distancia de caída (metros) (y)	0	5	20	45	80	125

Con los datos anteriores realiza:

1. Una gráfica distancia- tiempo para ilustrar estos datos. En el eje (x) ubica el tiempo empleado, en el eje (y) la distancia recorrida por la piedra.
2. Al comparar el comportamiento de los datos del tiempo y la distancia en la gráfica observe:
 - ¿Cómo varían los datos con respecto al eje (x) positivo y el eje y (y) positivo?
 - ¿Cuál es la variable dependiente y que valores toma?_____
 - ¿Cuál es la variable independiente y que valores toma?_____
 - Puedes establecer un valor constante de proporcionalidad entre estas variables? A cuánto equivaldría?
 - Describa la relación que existe entre la variación del eje (x) y la variación en el eje (y) en la gráfica que realizaste. Si es posible escribe una expresión matemática que muestre esta relación.
3. ¿Cuál de las siguientes gráficas se parece más a la gráfica que realizaste?



Escribe la ecuación de la gráfica similar a la que dibujaste en términos de distancia (Δx), tiempo (t).

4. Con base en la ecuación que acabas de escribir, determina una expresión matemática (ecuación) que relacione la variación de las magnitudes distancia (Δx) en función del tiempo (t) para los datos de la tabla.
5. Si se lanza una piedra desde un avión. ¿Cuántos metros caerá en 6 segundos?

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: Estrategia de Modelación matemática para la comprensión de un fenómeno físico de variación.

IED RICARDO GONZALEZ. SUBACHOQUE

ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA 2: "VELOCIDAD DE VALENTINA"

ACTIVIDAD DE MODELACIÓN DE MOVIMIENTO RECTILÍNEO

CONSTANTE

Nombre y Apellidos

Curso _____ **Fecha** _____

Propósito: Señor estudiante el siguiente instrumento tiene como propósito encontrar elementos que permiten identificar fortalezas y debilidades que presenta en el proceso de modelación.

"VELOCIDAD DE VALENTINA"



"La estudiante Valentina Zamora llega temprano a la sala de TICS del colegio para esperar su clase de Tecnología. A punto estaba de sentarse cuando se da cuenta que había olvidado su cuaderno en la biblioteca. Como le gusta mucho la clase fue a la biblioteca, y recogió cogió su cuaderno. La biblioteca está en un edificio en punto

diametralmente opuesto al bloque de las salas de TICS. La tabla siguiente muestra los tiempos y la distancia que empleo Valentina

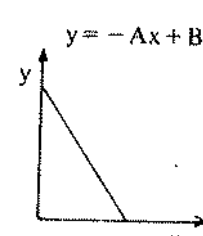
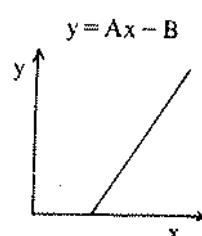
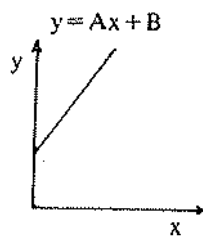
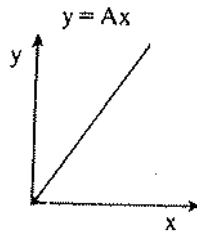
Distancia (mt)	0	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8	5,6
Tiempo (seg)	0	1	2	3	4	5	6	7
$K = X / T$								

En grupos de 2 estudiantes realiza lo siguiente:

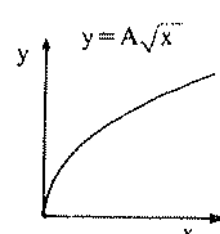
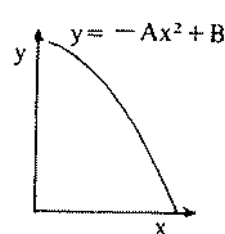
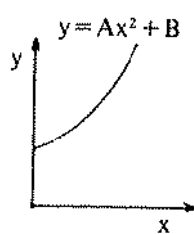
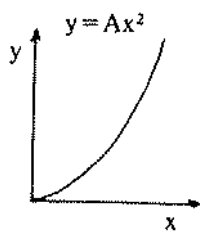
- 1) Realice las gráficas de distancia- tiempo, para el recorrido de Valentina.
En el eje x ubica el tiempo en el eje y ubica distancia.

2) ¿Cuál de las siguientes gráficas se parece más a la del problema "velocidad de Valentina"?

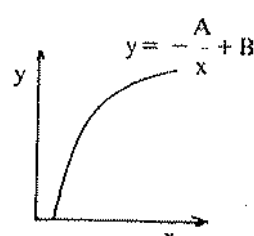
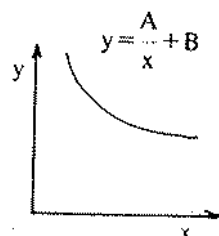
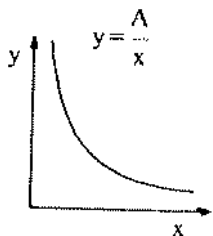
Lineal



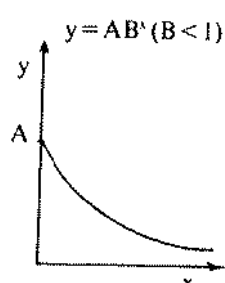
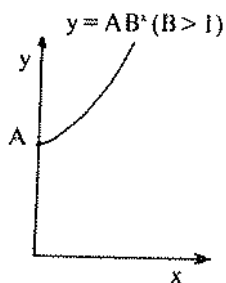
Cuadrática



Inversa



A y B
son números
mayores que cero.



Amplía esta
colección
cada vez que
encuentres
una nueva
función.

3) De acuerdo a la ecuación de la gráfica que selecciones intenta hallar el valor de A que hace que la ecuación se ajuste a los datos, ya sea por ensayo y error o sustituyendo para valores de x e y , y resuelve la ecuación resultante.

4) Usa la fórmula resultante para hallar cuantos metros recorre Valentina a los 12 segundos.

Recuerde:

x = tiempo (segundos)

y = distancia de caída (metros)

A es un numero constante, positivo que representa la velocidad de Valentina.

Convenciones:

Convengamos en que la velocidad de Valentina es positiva cuando se dirige a la biblioteca y negativa en sentido contrario.

Anexo 3. Registro de Información. Actividad Diagnóstica

		PRUEBA 1	"CAIDA DE UNA PIEDRA"				
PREGUNTA		Situación problema	1) Realice la	2) Determine	3) Identifica	4) Generaliza y modeliza	
	COD	I1SUB1C1 ; 3SUB1C1; I4SUB1C1	I2SUB1C1; I1SUB2C1; I1SUB2C2:	I1SUB1C2: I1SUB1C3; I3SUB1C3	I3SUB2C1; I2SUB2C2	I4SUB2C1; I5SUB2C1; I2SUB2C3; I3SUB2C2; I2SUB2C3	
1	E01		LC	LC	LC	LC	
2	E02		LC	LC	LC	LC	
3	E03		LC	LC	LC	LP	
4	E04		LC	LC	LC	LP	
5	E05		LC	LC	LC	LP	
6	E06		LC	LC	LC	LP	
7	E07		LC	LC	LC	LP	
8	E08		LC	LC	LP	LP	
9	E09		LC	LP	LP	LP	
10	E10		LC	LP	LP	LP	
11	E11		LC	LP	LP	LP	
12	E12		LC	LP	LP	LP	
13	E13		LC	LP	LP	LP	
14	E14		LC	LP	LP	LP	
15	E15		LC	LP	LP	LP	
16	E16		LC	LP	LP	LP	
17	E17		LC	LP	LP	LP	
18	E18		LC	LP	LP	LP	
19	E19		LC	LP	LP	LP	
20	E20		LC	LP	LP	LP	
21	E21		LC	LP	LP	LP	
22	E22		LC	LP	LP	LP	
23	E23		LC	NL	LP	LP	
24	E24		LC	NL	LP	LP	
25	E25		LP	NL	LP	NL	
26	E26		LP	NL	LP	NL	
27	E27		LP	NL	LP	NL	
28	E28		LP	NL	LP	NL	
29	E29		LP	NL	LP	NL	
30	E30		LP	NL	LP	NL	
31	E31		NL	NL	LP	NL	
32	E32		NL	NL	LP	NL	
33	E33		NL	NL	LP	NL	
34	E34		NL	NL	NL	NL	

Anexo 4. Secuencia Didáctica



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: Estrategia de Modelación matemática para la comprensión de un fenómeno físico de variación.

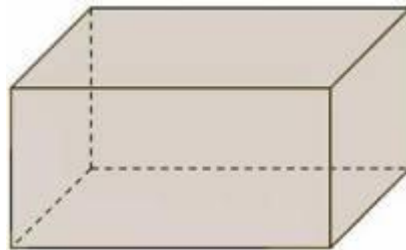
SECUENCIA DIDÁCTICA DE MODELACIÓN DE FENÓMENOS FÍSICOS

SESIÓN 1: DIMENSIONES Y VOLUMENES DE PARALELEPÍPEDOS "CAJA PROPORCIONAL"

Nombre y Apellidos _____

Curso _____ **Fecha** _____

Propósito: Modelar los cambios en la proporcionalidad de paralelepípedos rectangulares



Un paralelepípedo rectangular de volumen 60 cm³ tom los vlores de la tabla siguiente para el largo , ancho y altura.

Ancho (a)	4	5	6	7
Largo (l)	5	6	7	8

Altura (h)	3	2	1,42	1,07
Volumen (V)	60	60	60	60

a) Calcule los valores del área y perímetro y consígnelo en la tabla siguiente

Área (A)				
Perímetro (p)				

Ecuaciones: $A = a \times l \times h$

$p = (2 \times a) + (2 \times l)$

b) Elabore las gráficas en el plano cartesiano de las siguientes relaciones

Ancho vs. Altura

Ancho vs. Largo

Largo vs. Área

Altura vs. Área

Altura vs. Volumen

Área vs. Volumen

c) De acuerdo a las gráficas que obtuviste determina qué relación de proporcionalidad existe:

-Proporcionalidad directa

- Proporcionalidad inversa



SECUENCIA DIDÁCTICA DE MODELACIÓN DE FENÓMENOS FÍSICOS

SESIÓN 2: SEGUNDA LEY DE NEWTON. LEY DE LA FUERZA

Nombre y Apellidos _____

Curso _____ Fecha _____

Propósito: Modelar un fenómeno físico de variación con proporcionalidad directa

Procedimiento :

- *Comprenda la situación problemática*
- *Realiza la gráfica de variación de acuerdo a la tabla*
- *Determina las variables y la constante de proporcionalidad*
- *Encuentra la expresión matemática*
- *Generaliza la variación al lenguaje científico.*

Fenómeno: Segunda Ley de Newton. $F = m \times a$

La siguiente tabla muestra las fuerzas y las aceleraciones que experimenta una pelota al ser pateada por un jugador:

Fuerza (N)	1,8	3.6	5,4	7,2	9
Aceleración (m/s)	6	12	18	24	30

Con los datos anteriores determina:

a) Las variables que intervienen en el enunciado son :

a. _____

b) El fenómeno que se describe es: _____

c) ¿La primera variable aumenta o disminuye? _____

d) ¿La segunda variable aumenta o disminuye? _____

e) ¿Qué relación existe entre las variables (K) es proporcional? _____

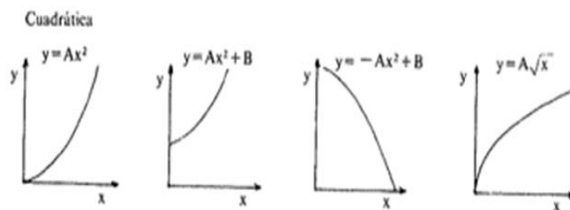
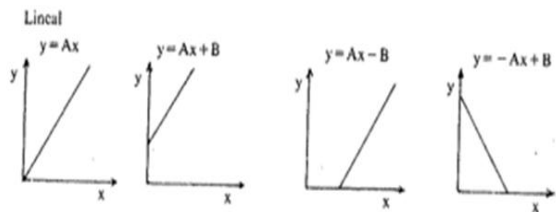
f) ¿Cuál es la variable dependiente? _____

g) ¿Cuál es la variable independiente? _____

h) ¿Qué representa la constante K en el fenómeno?

i) Realiza la gráfica de la situación planteada

j) ¿Cuál de las siguientes gráficas se parece más a la gráfica que realizaste?



k) Escribe la expresión matemática (ecuación) del fenómeno

l) Escribe la expresión matemática en términos científicos (Ecuación con los símbolos o letras)

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: Estrategia de Modelación matemática para la comprensión de un fenómeno físico de variación.

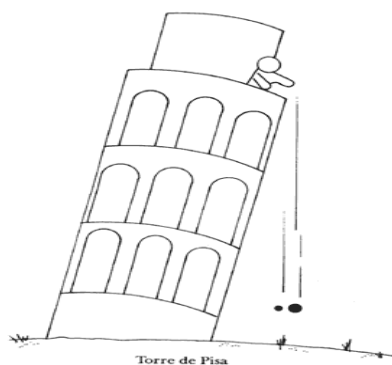
SECUENCIA DIDÁCTICA DE MODELACIÓN DE FENÓMENOS FÍSICOS

SESIÓN 3: MODELAR UN FENÓMENO DE CAIDA LIBRE

Nombre y Apellidos _____

Curso _____ **Fecha** _____

Propósito: Modelar un fenómeno físico de variación con proporcionalidad cuadrática



Un cuerpo en caída libre aumenta su velocidad, la gravedad es constante.

Ecuación: $h = g \times t^2$

Los valores de la altura y el tiempo de un cuerpo que cae de la Torre de Pisa se muestran en la siguiente tabla .

Altura (h)	9,8	39,2	88,2	156,8	245
Tiempo (s)	1	2	3	4	5

Con los datos anteriores determina:

a) Las variables que intervienen en el enunciado son :

b) El fenómeno que se describe es: _____

c) ¿La primera variable aumenta o disminuye? _____

d) ¿La segunda variable aumenta o disminuye? _____

e) ¿Qué relación existe entre las variables (K) es
proporcional? _____

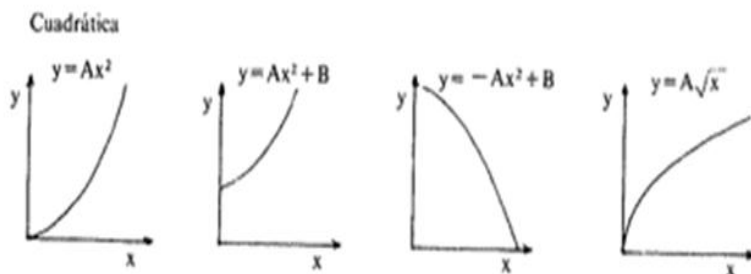
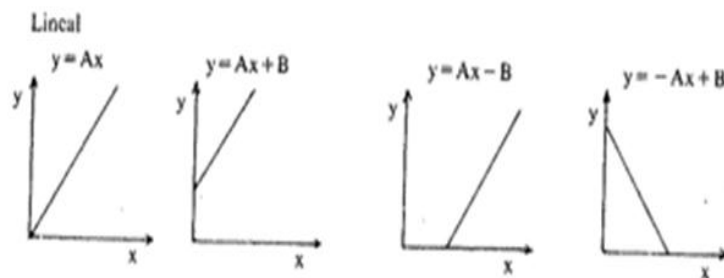
f) ¿Cuál es la variable dependiente? _____

g) ¿Cuál es la variable independiente? _____

h) ¿Qué representa la constante K en el fenómeno?

i) Realiza la gráfica de la situación planteada

j) ¿Cuál de las siguientes gráficas se parece más a la gráfica que realizaste?



k) Escribe la expresión matemática (ecuación) del fenómeno

- l) Escribe la expresión matemática en términos científicos (Ecuación con los símbolos o letras)



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: Estrategia de Modelación matemática para la comprensión de un fenómeno físico de variación.

SECUENCIA DIDÁCTICA DE MODELACIÓN DE FENÓMENOS FÍSICOS

SESIÓN 4: MODELAR UN FENÓMENO DE LA LEY DE BOYLE

Nombre y Apellidos _____

Curso _____ Fecha _____

Propósito: Modelar un fenómeno físico de variación con proporcionalidad INVERSA

LEY DE BOYLE *La presión en un gas es inversamente proporcional al volumen que ocupa dicho gas*
$$\frac{PRESIÓN}{VOLUMEN} = KTE$$

Los valores de la presión y el volumen en una jeringa se muestran en la siguiente tabla:

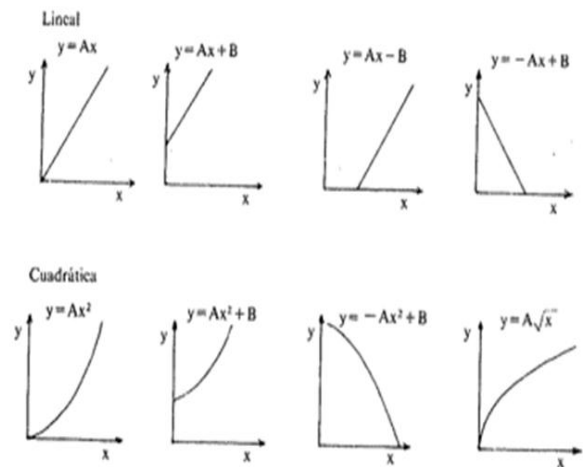
Presión (Pa)	100	50	25	20	12,5
Volumen (litros)	5	10	20	25	40

Con los datos anteriores determina:

- a. a) Las variables que intervienen en el enunciado son :

b. _____

- b) El fenómeno que se describe es: _____
- c) ¿La primera variable aumenta o disminuye? _____
- d) ¿La segunda variable aumenta o disminuye? _____
- e) ¿Qué relación existe entre las variables (K) es proporcional? _____
- f) ¿Cuál es la variable dependiente? _____
- g) ¿Cuál es la variable independiente? _____
- h) ¿Qué representa la constante K en el fenómeno?
- i) ¿Cuál de las siguientes gráficas se parece más a la gráfica que realizaste?



- j) Realiza la gráfica de la situación planteada
- k) Escribe la expresión matemática (ecuación) del fenómeno
- l) Escribe la expresión matemática en términos científicos (Ecuación con los símbolos o letras)

Anexo 5. Sistematización de la información Fase de Intervención

REGISTRO DE INFORMACIÓN								
Convención:								
NL: No logrado			SESION 2		"FUERZA DE UN RESORTE			
LP: Logrado parcialmente								
LC: Logrado completamente			1) Comprende Situ	2) Determine	1) Realice la g	3) Identifica	4) Modeliza e	
		Pregunta	De la a) a la b)	De C a H	i)	j)	De k a l	
	NUMERO	CODIGO ESTUD	I1SUB1C1 ; 3SUB1C1; I4SUB1C1	I2SUB1C1; I1SUB2C1; I1SUB2C2:	I1SUB1C2: I1SUB1C3; I3SUB1C3	I3SUB2C1; I2SUB2C2	I4SUB2C1; I5SUB2C1; I2SUB2C3; I3SUB2C2; I2SUB2C3	
	1	AS	CTO A LA COMPR	LC	LC	LP	LP	
	2	CA	LC	LC	LC	LC	LC	
	3	CR	LC	LP	LP	LC	LP	
	4	EJ	LC	LC	LP	LC	LC	
	5	GS	LC	NL	LC	LP	LP	
	6	GV	NL	NL	NL	NL	NL	
	7	HG	LC	LC	LP	LP	LP	
	8	IJ	LC	LP	LP	LC	LP	
	9	LF	LC	LC	LP	LC	LC	
	10	LJ	LC	LC	LP	LC	LC	
	11	MR	LP	LC	LP	LC	LC	
	12	MJ	LC	LC	LC	LC	LP	
	13	MY	LC	LC	LC	LC	LP	
	14	ML	NL	NL	NL	NL	NL	
	15	MB	LC	LC	LC	LC	LC	
	16	MR	LC	LC	LC	LC	LC	
	17	MCH	LC	LC	LC	LC	LC	
	18	OJ	LC	LC	LC	LC	LC	
	19	OM	LC	LC	LC	LC	LC	
	20	OY	LC	LC	LC	LC	LC	
	21	PM	LC	LC	LC	LC	LP	
	22	PP	LC	NL	LC	LC	LC	
	23	PW	LC	LC	LC	LC	LC	
	24	QB	LC	LC	LP	LC	LC	
	25	RH	LC	LC	LP	LC	LC	
	26	SY	NL	NL	NL	NL	NL	
	27	SZ	LC	NL	LP	LP	LP	
	28	SL	LC	NL	LP	LP	LP	
	29	SF	LC	LP	LP	LC	LP	
	30	TB	LC	NL	LP	LC	LP	
	31	UC	LC	LC	LP	LP	LP	
	32	VA	LP	LC	LP	LC	LC	
	33	VD	LP	LP	NL	LP	LP	
	34	ZM	LC	LC	LC	LC	LC	

[illegible]

Anexo 6. Consentimiento Informado

UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN.

MANIFESTACIÓN DE CONSENTIMIENTO INFORMADO

El PROFESOR CARLOS ALBERTO SILVA JIMÉNEZ, docente de Física de la IED Ricardo González de Subachoque a través de mi hijo/a _____ ha informado sobre la realización del proyecto de investigación denominado “Estrategia de Modelación matemática para la comprensión de un fenómeno físico de variación” como requisito dentro de la Maestría en educación que cursa actualmente y solicita su participación en dicho proyecto con la información que pueda solicitar. Conociendo la intención del profesor de realizar dicho proyecto, yo como padre/madre de familia del estudiante autorizo y otorgo mi consentimiento para la participación de mi hijo en dicha investigación y la utilización por parte del docente de la información obtenida.

Firma. _____

C.C: _____

Fecha: _____

